Ronald Rodríguez Espinoza
Sarela Alfaro Cruz
Nicodemo Jamanca Gonzáles

# Transferencia de masa

Serie Notas de Clases

Editorial UNAB

**Universidad Nacional de Barranca**

## Comisión Organizadora

Inés Miriam Gárate Camacho
Presidenta

Tarcila Cruz Sánchez
Vicepresidenta Académica

Luis Enrique Carrillo Díaz
Vicepresidente de Investigación

## Dirección General de Investigación

Elizabeth del Pilar Paredes Cruz
Directora

## Escuela de Ingeniería en Industrias Alimentarias

Nicodemo Jamanca Gonzáles
Director

## Oficina de Publicaciones Científicas

Hernán Verde Luján
Jefe

**2017**

**Editorial UNAB**

Ronal Rodríguez Espinoza[1]
Sarela Alfaro Cruz
Nicodemo Jamanca Gonzáles

Serie Notas de Clases
Ediciones UNAB

©Ediciones **UNAB** 2017
Esta obra está sujeta a derechos de autor. Todos los derechos están reservados por el editor, ya sea total o parcialmente; específicamente los derechos de traducción, reimpresión, la reutilización de las ilustraciones, la adaptación electrónica, software, o cualquier forma no conocida ahora y desarrollada en el futuro. Quedan exentos de esta prohibición, las acciones dadas por el comprador de esta obra, para uso académico y actividaes de divulgación científica.

[1]Profesores de la Escuela de Ingeniería en Industrias Alimentarias
Universidad Nacional de Barranca
Lima, Perú

# Serie

# Notas de Clases

Si un país es regido por los principios de la razón, la pobreza y la miseria son objetos de verguenza. Si un país no es regido por los principios de la razón, la riqueza y las honras son objetos de verguenza.

*Confucio* (Siglo V a.c)

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE BARRANCA**

**CARRERA PROFESIONAL DE INGENIERÍA EN INDUSTRIAS ALIMENTARIAS**

# TRANSFERENCIA DE MASA

Autores:

Ing. Ronald F. Rodriguez Espinoza

Ing. Sarela C. Alfaro Cruz

Ing. Nicodemo C. Jamanca Gonzáles

# PRESENTACIÓN

El presente texto no tiene más mérito que ser una recopilación práctica y sistemática acerca de los principios fundamentales de la Transferencia de Masa, que ponemos a disposición de nuestros alumnos, y en forma muy especial de los alumnos del programa académico de Ingeniería en Industrias Alimentarias de nuestra casa superior de estudios.

En tal sentido, debemos mencionar que la importancia de la Transferencia de Masa se debe a que interviene en muchas de las experiencias de la vida diaria, como por ejemplo el endulzar una taza de café; y al papel que tiene en los procesos industriales, como el estudio de la rapidez de las reacciones químicas y biológicas catalizadas. En esto radica lo fundamental del estudio de la Transferencia de Masa dentro de los planes de estudio de Ingeniería.

Se agradece desde ya las sugerencias y correcciones que nos hagan llegar.

LOS AUTORES

# INTRODUCCIÓN

La transferencia de masa ocurre cuando una sustancia se transfiere a través de otra u otras a escala molecular. Esto ocurre cuando se ponen en contacto dos sustancias con composiciones químicas diferentes. La sustancia que se difunde abandona una región de alta concentración y pasa a otra de concentración menor[1].

La transferencia de masa puede ocurrir en los sólidos, líquidos y gases.

En el presente texto se abordará la transferencia de masa por difusión, haciendo uso de las leyes de Fick, y también la transferencia de masa por convección.

La difusión molecular se ampliará de acuerdo a su aplicación en gases, líquidos y sólidos.

También se verán los diferentes métodos para calcular los coeficientes de transferencia de masa, y las analogías que existe entre la transferencia de masa y de calor. Y por último la transferencia de masa entre fases gaseosa y líquida.

[1] Otro factor que influye en el proceso de difusión es el espaciamiento molecular, por lo que la razón de difusión es mucho más alta en los gases que en los líquidos, y mucho más alta en estos que en los sólidos.

# INDICE

**PRESENTACIÓN** ..... i

**INTRODUCCIÓN** ..... ii

**I. TRANSFERENCIA DE MASA** ..... 3

**1. Importancia de la Transferencia de Masa:** ..... 3

**2. Ejemplos de Procesos de Transferencia de Masa:** ..... 3

**II. TRANSFERENCIA MOLECULAR DE MASA** ..... 6

**1. Representación de la concentración:** ..... 6

**a) Base másica:** ..... 6

**b) Base molar:** ..... 6

**2. Leyes de Fick de la difusión:** ..... 8

**2.1. Difusión en estado estacionario - Primera ley de Fick:** ..... 8

**2.2. Difusión en estado no estacionario - Segunda ley de Fick:** ..... 21

**III. DIFUSIÓN MOLECULAR EN GASES** ..... 33

**1. Contradifusión equimolar en gases:** ..... 33

**2. Caso general para la difusión de los gases A y B más convección:** ..... 38

**3. Difusión en estado estacionario de *A* que se difunde a través de *B* no difusivo y en reposo:** ..... 39

**4. Difusión a través de un área de corte transversal variable:** ..... 44

a) **Difusión desde una esfera:** ..... 44

b) **Difusión por un conducto de área de corte transversal no uniforme:** ..... 46

**IV. DIFUSIÓN MOLECULAR EN LÍQUIDOS** ..... 49

**1. Ecuaciones para la difusión en líquidos:** ..... 49

**a) Contradifusión equimolar:** ..... 49

**b) Difusión de *A* a través de *B* que no se difunde:** ..... 50

**V. DIFUSIÓN MOLECULAR EN SÓLIDOS** ..... 53

**1. Difusión de sólidos que siguen la ley de Fick:** ..... 53

**2. Difusión en sólidos porosos en los que afecta la estructura:** ..... 55

**a) Difusión de líquidos en sólidos porosos:** ..... 55

**b) Difusión de gases en sólidos porosos:** ..... 56

**VI. COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE MASA** ..... 57

**1. Introducción:** ..... 57

**a) Contratransferencia equimolar:** ..... 58

**b) Transferencia de A a través de B que no se transfiere:** ..... 58

**2. Coeficientes de Transferencia de masa en flujo laminar:** ..... 59

**3. Coeficientes de transferencia de masa en flujo turbulento:** ..... 61

**a) Teoría de la película:** ..... 62

**b) Teoría de la penetración:** ..... 62

**c) Teoría de renovación de la superficie:** ..... 63

**d) Teoría combinada de renovación de la superficie de la película:** ..... 64

**e) Teoría de estiramiento superficial:** ..... 64

**f) Teoría de la capa límite:** ..... 64

**VII. ANÁLOGÍAS ENTRE LAS TRANSFERENCIAS DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO, CALOR Y MASA** ..... 66

**Analogía de Reynolds:** ..... 72

**Analogía de Chilton - Colburn:** ..... 73

**VIII. TRANSFERENCIA DE MASA ENTRE FASES GASEOSA Y LÍQUIDA** ..... 85

**BIBLIOGRAFIA** ..... 88

# I. TRANSFERENCIA DE MASA

## 1. Importancia de la Transferencia de Masa:

La transferencia de masa juega un papel muy importante en la mayoría de procesos químicos, debido a que estos requieren de una purificación inicial de las materias primas empleadas, así como de la separación final de los productos y subproductos. Separaciones que, por lo general involucran costos considerables dentro de dichos procesos.

Cuando se van a diseñar o analizar equipos industriales que van a ser empleados en operaciones industriales de separación, es necesario conocer la velocidad de transferencia de masa para determinar la eficiencia de las etapas involucradas, a fin de determinar el número de etapas reales que se necesitan.

## 2. Ejemplos de Procesos de Transferencia de Masa:

Muchos fenómenos comunes implican una transferencia de masa:

- ✓ Si se deja un recipiente abierto con agua, llega un momento en que ésta se evapora como resultado de la difusión de las moléculas de agua en el aire, debido a la diferencia de concentración del vapor de agua entre la superficie del líquido y el aire que lo rodea.
- ✓ Un trozo de $CO_2$ sólido (hielo seco) se hace más pequeño con el transcurso del tiempo, debido a que las moléculas de $CO_2$ se difunden hacia el aire.
- ✓ Una cucharada de azúcar sumergida en una taza de café se disuelve y se difunde, endulzándola. Esto ocurre sin agitación, a pesar de que las moléculas de azúcar son más pesadas que las del agua.
- ✓ Las moléculas de un lápiz de color introducido en un vaso con agua se difunden hacia ésta, como se evidencia por la dispersión gradual del color en esa agua.
- ✓ Una pequeña fracción de $O_2$ que se encuentra en el aire se difunde hacia el agua y satisface las necesidades de oxígeno de los animales acuáticos.
- ✓ Cuando la madera verde se seca parcialmente, el agua se difunde hasta la superficie cortada, y después a la atmósfera circundante.

Algunas aplicaciones de la transferencia de masa en los procesos industriales son:

- ✓ La remoción de materiales contaminantes de las corrientes de descarga de los gases y aguas contaminadas.
- ✓ En un proceso de fermentación, los nutrientes y el oxígeno disuelto en la solución se difunden hacia los microorganismos.
- ✓ La destilación para separar alcohol de agua implica una transferencia de masa.
- ✓ La difusión de neutrones dentro de los reactores nucleares.
- ✓ En el procesamiento de uranio, un disolvente orgánico extrae una sal de uranio en solución.
- ✓ La difusión de sustancias al interior de los poros del carbón activado.
- ✓ La difusión del carbono hacia el hierro en el curso del cementado.
- ✓ En una reacción catalítica, los reactivos se difunden del medio circundante a la superficie catalítica donde se verifica la reacción.
- ✓ La extracción de $SO_2$ de los gases producidos en la combustión se lleva a cabo por absorción en una solución líquida básica.
- ✓ En la industria farmacéutica también ocurren procesos de transferencia de masa tales como la disolución de un fármaco, la transferencia de nutrientes y medicamentos a la sangre, etc.

## 3. Clasificación General de la Transferencia de Masa:

El mecanismo de la transferencia de masa, depende de la dinámica del sistema en que se lleva a cabo. Hay dos modos de transferencia de masa:

**a) Transferencia molecular de masa:** Llamada también difusión. En donde la masa se transfiere por medio del movimiento molecular fortuito del fluido (movimiento individual de las moléculas), debido a gradientes de concentración.

**b) Transferencia de masa por convección:** El transporte de masa ocurre debido al movimiento global del fluido, por lo que puede ocurrir en régimen laminar o turbulento. Tal como ocurre con el transporte de calor, el transporte de masa por convección puede darse como **convección forzada**, en la que el movimiento del fluido es producido por una fuerza externa, y **convección libre o natural**, en el que el movimiento global se desarrolla como consecuencia de cambios de densidad originados por las diferencias de concentración del medio.

Estos dos mecanismos suelen presentarse simultáneamente; sin embargo, en el análisis de un problema en particular, se considera solo uno de ellos, por ser cuantitativamente importante.

# II. TRANSFERENCIA MOLECULAR DE MASA

La transferencia molecular de masa o difusión molecular, es el resultado de la transferencia o desplazamiento de moléculas individuales a través de un fluido debido a sus movimientos desordenados. En estos movimientos, las moléculas chocan con otras cambiando sus velocidades tanto en magnitud como en dirección.

La transferencia molecular de masa puede ocurrir en cualquiera de los 3 estados de agregación de la materia (siendo su mecanismo de transporte muy diferente en cada uno de ellos) como resultado de un gradiente de concentración, temperatura, presión, o de la aplicación a la mezcla de un potencial eléctrico.

## 1. Representación de la concentración:

**a) Base másica:** En una base másica, la concentración se expresa en términos de *densidad* (o concentración de masa), la cual es la masa por unidad de volumen.

- **Densidad parcial de la especie *i*:**

$$\rho_i = \frac{m_i}{V} \quad (1)$$

$$[\rho_i] = \frac{kg}{m^3}$$

- **Densidad total de la mezcla:**

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{\sum m_i}{V} = \sum \rho_i \quad (2)$$

La concentración de masa también puede expresarse en forma adimensional, en términos de la *fracción de masa* (*w*):

- **Fracción de masa de la especie *i*:**

$$w_i = \frac{m_i}{m} = \frac{\frac{m_i}{V}}{\frac{m}{V}} = \frac{\rho_i}{\rho} \quad (3)$$

$$[w_i] = 1$$

**b) Base molar:** En una base molar, la concentración se expresa en términos de *concentración molar* (o densidad molar), la cual es la cantidad de materia, en *kmol*, por unidad de volumen.

- **Concentración molar parcial de la especie *i*:**

$$C_i = \frac{n_i}{V} \quad (4)$$

$$[C_i] = \frac{kmol}{m^3}$$

- **Concentración molar total de la mezcla:**

$$C = \frac{n}{V} = \frac{\sum n_i}{V} = \sum C_i \quad (5)$$

La concentración molar también puede expresarse en forma adimensional en términos de la *fracción molar*.

- **Fracción molar de la especie *i*:**

$$y_i = \frac{n_i}{n} = \frac{\frac{n_i}{V}}{\frac{n}{V}} = \frac{C_i}{C} \quad (6)$$

Además las concentraciones de masa y molar están relacionadas entre sí por:

- **Para la especie *i*:**

$$C_i = \frac{\rho_i}{PM_i} \quad (7)$$

- **Para la mezcla:**

$$C = \frac{\rho}{PM} \quad (8)$$

Donde: *PM* es el peso molecular de la mezcla, la cual puede determinarse a partir de:

$$PM = \frac{m}{n} = \frac{\sum n_i \cdot PM_i}{n} = \sum \frac{n_i}{n} \cdot PM_i = \sum y_i \cdot PM_i \quad (9)$$

Las fracciones de masa y molar de la especie *i* de una mezcla están relacionadas entre sí por:

$$w_i = \frac{\rho_i}{\rho} = \frac{C_i \cdot PM_i}{C \cdot PM} = y_i \cdot \frac{PM_i}{PM} \quad (10)$$

A bajas presiones, puede tenerse una aproximación conveniente de un gas o mezcla de gases como un *gas ideal*, con error despreciable. Por lo tanto, la *fracción de presión* de la especie *i* de una mezcla de gases ideales es equivalente a la fracción molar de esa especie y puede usarse en lugar de ella en el análisis de la transferencia de masa:

$$\frac{P_i}{P} = \frac{\frac{n_i \cdot R_u \cdot T}{V}}{\frac{n \cdot R_u \cdot T}{V}} = \frac{n_i}{n} = y_i \quad (11)$$

Donde: $R_u$, es la constante universal de los gases, tanto para la especie *i*, como para la mezcla.

## 2. Leyes de Fick de la difusión:

Las ecuaciones básicas de la difusión fueron escritas en 1855 por Adolfo Fick, el cual consideraba que el movimiento difusivo, o penetración del soluto en el disolvente, es totalmente análogo a la penetración del calor en la conducción térmica. Según esta hipótesis, para la difusión se pueden utilizar las mismas ecuaciones que empleaba Fourier para estudiar la conductividad térmica.

### 2.1. Difusión en estado estacionario - Primera ley de Fick:

Considerando una mezcla binaria en un medio en reposo de las especies químicas A y B, en donde el número de moléculas de A en un volumen dado en una región, es mayor que en otra región vecina, entonces tendrá lugar la migración de moléculas de A a través de B, es decir desde la zona de mayor concentración hacia la de menor concentración.

El estado estacionario se verifica si consideramos la difusión del soluto en la dirección *z* (como se muestra en la figura). Supongamos que tras un periodo de tiempo, las concentraciones en $z_1$ y $z_2$ se mantienen constantes $C_1$ y $C_2$ respectivamente. Estas condiciones de difusión se conocen como estado estacionario.

Al representar la concentración *C* frente a la posición o distancia *z*, la gráfica resultante se denomina perfil de concentración, en donde la pendiente de esta gráfica en un punto determinado es el gradiente de concentración:

$$\text{gradiente de concentración} = \frac{dC}{dz} \quad (12)$$

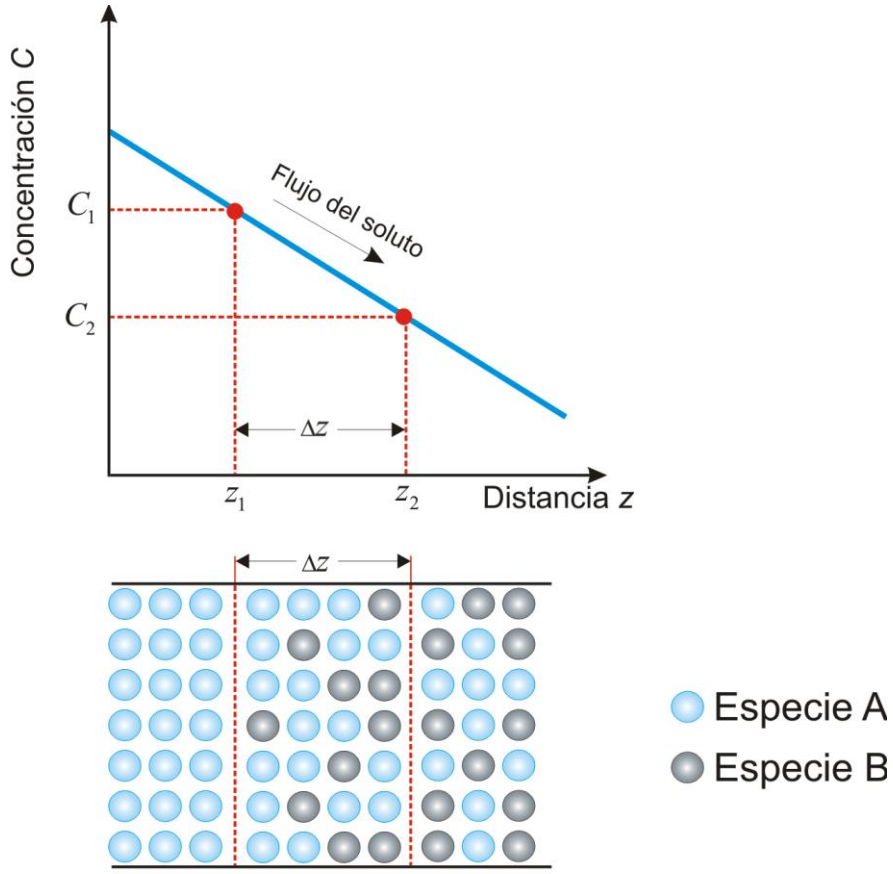



**Figura 1**: Difusión molecular en estado estacionario

En el sistema mostrado se producirá un flujo de moléculas del lado de concentración más alta al de concentración más baja.

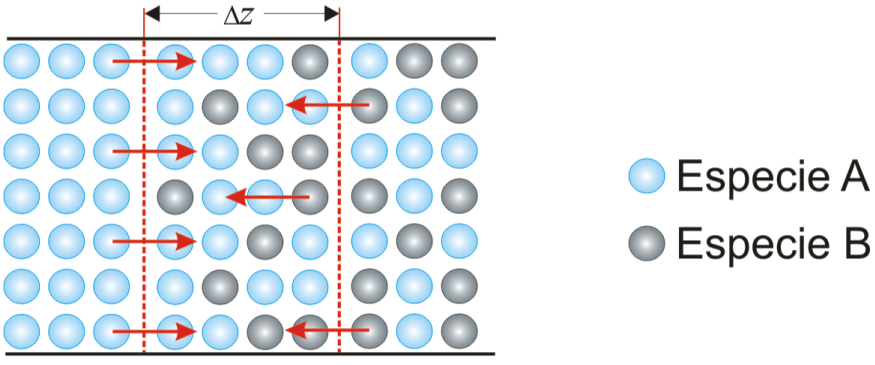



**Figura 2:** Difusión molecular de dos especies

La primera ley de Fick de la difusión de masa de la especie química A en la dirección z estará dada por:

$$\dot{n}_{dif,A} = -D_{AB} \cdot A \cdot \frac{dC_A}{dz} \quad (13)$$

Donde:

$\dot{n}_{dif,A}$: Es la razón de difusión de masa de la especie química *A*, en kmol/s.

$D_{AB}$: Es el cociente de difusión[2] (o difusividad de la masa), en $m^2/s$.

$C_A$: Es la concentración de la especie *A* en la mezcla en ese lugar.

$\frac{dC_A}{dz}$: Gradiente de concentración de *A*, en la dirección z.

El signo negativo de la ecuación (13) hace hincapié que la difusión ocurre en el sentido del decremento en la concentración, por lo que el gradiente es negativo pero el flujo de masa debe ser positivo.

Para una mezcla binaria, podemos expresarla ley de Fick de diversas maneras:

**Base másica:**

$$\dot{m}_A = -\rho \cdot D_{AB} \cdot A \cdot \frac{dw_A}{dz} \quad (14)$$

$$\dot{m}_A = -\rho \cdot D_{AB} \cdot A \cdot \frac{d\left(\frac{\rho_A}{\rho}\right)}{dz} \quad (15)$$

Si $\rho$ es constante:

$$\dot{m}_A = -D_{AB} \cdot A \cdot \frac{d\rho_A}{dz} \quad (16)$$

**Base molar:**

$$\dot{n}_A = -C \cdot D_{AB} \cdot A \cdot \frac{dy_A}{dz} \quad (17)$$

$$\dot{n}_A = -C \cdot D_{AB} \cdot A \cdot \frac{d\left(\frac{C_A}{C}\right)}{dz} \quad (18)$$

[2] El coeficiente de difusión o difusividad $D_{AB}$ de un componente A en una solución B, es una constante de proporcionalidad entre el flujo de masa y el gradiente de concentración y cuya magnitud numérica indica la facilidad con la que el componente A se transfiere en mezcla.

Si *C* es constante:

$$\dot{n}_A = -D_{AB} \cdot A \cdot \frac{dC_A}{dz} \quad (19)$$

También se puede expresar el flujo de masa (por difusión) y el flujo molar (por difusión) de la especie *A* como la transferencia de masa por difusión, por unidad de tiempo y por unidad de área normal a la transferencia de masa, conocido como el flujo específico de difusión.

**Base másica:**

$$j_A = \frac{\dot{m}_A}{A} = -\rho \cdot D_{AB} \cdot \frac{dw_A}{dz} \quad (20)$$

$$j_A = \frac{\dot{m}_A}{A} = -\rho \cdot D_{AB} \cdot \frac{d\left(\frac{\rho_A}{\rho}\right)}{dz} \quad (21)$$

Donde: $\left[j_A\right] = \frac{kg}{s \cdot m^2}$

**Base molar:**

$$J_A = \frac{\dot{n}_A}{A} = -C \cdot D_{AB} \cdot \frac{dy_A}{dz} \quad (22)$$

$$J_A = \frac{\dot{n}_A}{A} = -C \cdot D_{AB} \cdot \frac{d\left(\frac{C_A}{C}\right)}{dz} \quad (23)$$

Donde: $\left[J_A\right] = \frac{kmol}{s \cdot m^2}$

En el caso especial de densidad constante $\rho$ de la mezcla o concentración molar $C$ constante, las relaciones anteriores se simplifican:

**Base másica:** ( $\rho$ = constante)

$$j_A = -D_{AB} \cdot \frac{d\rho_A}{dz} \quad (24)$$

Donde: $\left[j_A\right] = \frac{kg}{s \cdot m^2}$

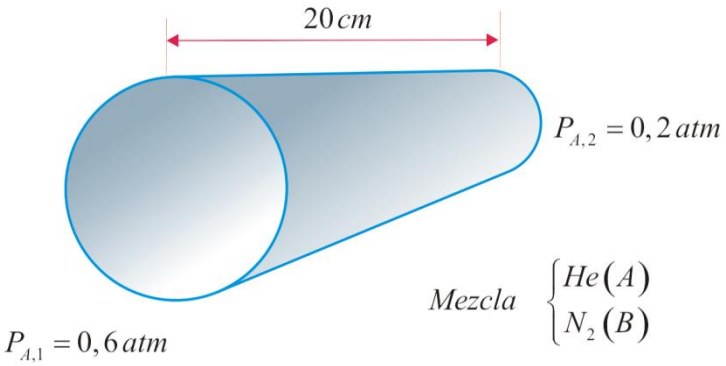
**Base molar:** ($C$= constante)

$$J_A = -D_{AB} \cdot \frac{dC_A}{dz} \quad (25)$$

Donde: $\left[J_A\right] = \frac{kmol}{s \cdot m^2}$

**Problema 1:** Una tubería contiene una mezcla de He y $N_2$ gaseosa a 298 K y 1 atm de presión total, constante en toda la extensión del tubo. En uno de los extremos de este punto 1, la presión parcial $P_{A,1}$ del He es 0,60 atm y en el otro extremo, a 20 cm, $P_{A,2}$ es 0,20 atm. Calcule en unidades SI el flujo específico de He en estado estacionario cuando el valor de $D_{AB}$ de la mezcla He-$N_2$ es 0,687 $cm^2/s$.

*Solución:*




Considerando que el He cumple la ley de los gases ideales:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Se tiene:

$$C_A = \frac{n_A}{V} = \frac{P_A}{R \cdot T}$$

Reemplazando en la ecuación (25) de la ley de Fick:

$$J_A = -D_{AB} \cdot \frac{d\left(\frac{P_A}{R \cdot T}\right)}{dz}$$

$$J_A = -\frac{D_{AB}}{R \cdot T} \cdot \frac{dP_A}{dz}$$

Ordenando e integrando:

$$J_A \cdot \int_{z_1}^{z_2} dz = -\frac{D_{AB}}{R \cdot T} \cdot \int_{P_{A,1}}^{P_{A,2}} dP_A$$

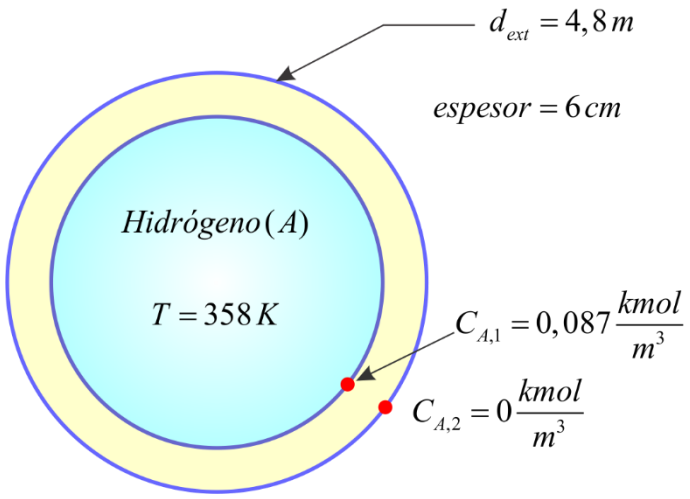
$$J_A \cdot (z_2 - z_1) = -\frac{D_{AB}}{R \cdot T} \cdot (P_{A,2} - P_{A,1})$$

$$J_A = \frac{D_{AB} \cdot (P_{A,1} - P_{A,2})}{R \cdot T \cdot (z_2 - z_1)} \quad (26)$$

$$J_A = \frac{D_{AB} \cdot (P_{A,1} - P_{A,2})}{R \cdot T \cdot (z_2 - z_1)} = \frac{\left(6,87 \times 10^{-5} \frac{m^2}{s}\right) \cdot (0,6\,atm - 0,2\,atm)}{\left(0,082 \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K}\right) \cdot (298\,K) \cdot (0,2\,m) \times \frac{1 m^3}{10^3 L}} = 5,62 \times 10^{-3} \frac{mol\ He}{m^2 \cdot s}$$

**Problema 2:** Se almacena gas hidrógeno a presión, a 358 K, en un recipiente esférico hecho de níquel con 4,8 m de diámetro exterior. La pared esférica del recipiente tiene 6 cm de espesor. Se determina que la concentración molar del hidrógeno en el níquel, en la superficie exterior, es despreciable. Determine el gasto de masa por difusión del hidrógeno a través del recipiente.

El coeficiente de difusión binaria para el hidrógeno en el níquel a 358 K es $D_{AB} = 1,2 \times 10^{-12}\ \frac{m^2}{s}$.



## *Solución:*

Utilizando la ecuación (19) y considerando que el gradiente de concentración será radial:

$$\dot{n}_A = -D_{AB} \cdot A \cdot \frac{dC_A}{dr}$$

El área de la esfera es: $A = 4\pi r^2$, reemplazando y desarrollando:

$$\dot{n}_A \cdot dr = -D_{AB} \cdot (4\pi r^2) \cdot dC_A$$

$$\dot{n}_A \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -4 \cdot \pi \cdot D_{AB} \cdot \int_{C_{A,1}}^{C_{A,2}} dC_A$$

$$\dot{n}_A \cdot \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] = -4 \cdot \pi \cdot D_{AB} \cdot \left(C_{A,2} - C_{A,1}\right)$$

$$\dot{n}_A = \frac{4 \cdot \pi \cdot D_{AB} \cdot \left(C_{A,1} - C_{A,2}\right)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

Donde:

$r_1 = 2{,}34\ m$

$r_2 = 2{,}4\ m$

Reemplazando en la ecuación anterior:

$$\dot{n}_A = \frac{4 \cdot \pi \left(1{,}2 \times 10^{-12}\ \frac{m^2}{s}\right) \cdot \left(0{,}087\ \frac{kmol}{m^3} - 0\right)}{\frac{1}{2{,}34\ m} - \frac{1}{2{,}4\ m}}$$

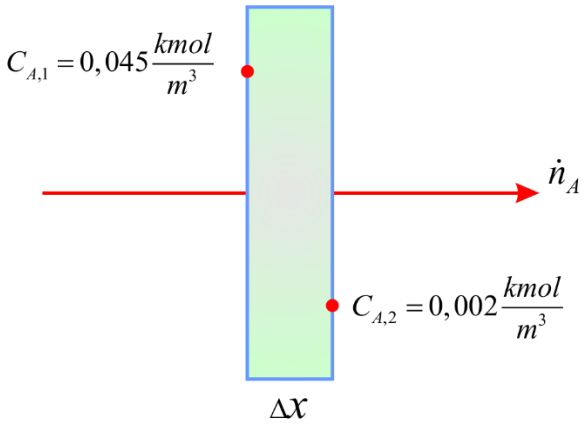
$$\dot{n}_A = 1{,}23 \times 10^{-10}\ \frac{kmol}{s}$$

**Problema 3:** Una membrana delgada de plástico separa hidrógeno de aire. Se determina que las concentraciones molares del hidrógeno en la membrana, en las superficies interior y exterior, son de 0,045 y 0,002 kmol/m$^3$, respectivamente. El coeficiente de difusión binaria del hidrógeno en el plástico, a la temperatura de operación, es de $5{,}3\times10^{-10}$ m$^2$/s. Determine el gasto de masa del hidrógeno por difusión a través de la membrana, en condiciones estacionarias, si el espesor de la membrana es de:

a) 2 mm

b) 0,5 mm

*Solución:*




De la primera ley de Fick:

$$J_A = -D_{AB} \cdot \frac{dC_A}{dx}$$

$$J_A \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx = -D_{AB} \cdot \int_{C_{A,1}}^{C_{A,2}} dC_A$$

$$J_A \cdot (x_2 - x_1) = -D_{AB} \cdot (C_{A,2} - C_{A,1})$$

$$J_A = \frac{D_{AB} \cdot (C_{A,1} - C_{A,2})}{\Delta x}$$

a) Para $\Delta x = 0{,}002\ m$

$$J_A = \frac{\left(5{,}3 \times 10^{-10}\ \frac{m^2}{s}\right) \cdot \left(0{,}045\ \frac{kmol}{m^3} - 0{,}002\ \frac{kmol}{m^3}\right)}{0{,}002\ m}$$

$$J_A = 1{,}1395 \times 10^{-8}\ \frac{kmol}{m^2 \cdot s}$$

$$j_A = 1{,}1395 \times 10^{-8}\ \frac{kmol}{m^2 \cdot s} \times \frac{2\ kg}{kmol} = 2{,}279 \times 10^{-8}\ \frac{kg}{m^2 \cdot s}$$

b) Para $\Delta x = 0{,}0005\ m$

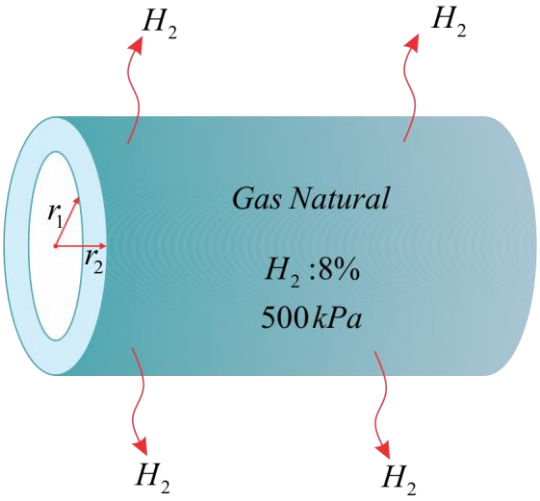
$$J_A = \frac{\left(5{,}3 \times 10^{-10}\ \frac{m^2}{s}\right) \cdot \left(0{,}045\ \frac{kmol}{m^3} - 0{,}002\ \frac{kmol}{m^3}\right)}{0{,}0005\ m}$$

$$J_A = 4{,}558 \times 10^{-8}\ \frac{kmol}{m^2 \cdot s}$$

$$j_A = 4{,}558 \times 10^{-8}\ \frac{kmol}{m^2 \cdot s} \times \frac{2\ kg}{kmol} = 9{,}116 \times 10^{-8}\ \frac{kg}{m^2 \cdot s}$$

**Problema 4:** La solubilidad del gas hidrógeno en acero, en términos de su fracción de masa, se expresa como $w_{H_2} = 2{,}09 \times 10^{-4} exp\left(\frac{-3950}{T}\right) \cdot P_{H_2}^{0,5}$, donde $P_{H_2}$ es la presión parcial del hidrógeno, en bar, y T es la temperatura en K. Si se transporta gas natural en un tubo de acero de 1 cm de espesor y 3 m de diámetro interno, a una presión de 500 kPa, y la presión parcial del hidrógeno en el gas natural es de 8%, determine la razón más alta de la pérdida de hidrógeno a través de una sección de 100 m de largo del tubo, en condiciones estacionarias, a una temperatura de 293 K, si el tubo está expuesto al aire. Tome la difusividad del hidrógeno en el acero como $2{,}9 \times 10^{-3}$ $m^2/s$. Las masas moleculares del $H_2$ y $CH_4$ son de 2 y 16 kg/kmol respectivamente. La densidad de la tubería de acero es 7854 $kg/m^3$.

## Solución:




$$y_{H_2} = \frac{P_{H_2}}{P} = 0{,}08$$

$$P_{H_2} = (0{,}08)(500\ kPa) = 40\ kPa = 0{,}4\ bar$$

$$w_{H_2} = w_{A,1} = 2{,}09 \times 10^{-4} exp\left(\frac{-3950}{293}\right) \cdot (0{,}4)^{0{,}5} = 1{,}847 \times 10^{-10}$$

La concentración del hidrógeno en el aire es prácticamente cero, por lo que la concentración en la superficie externa de la tubería puede ser tomada como cero:

$w_{A,2} = 0$

$r_1 = 1{,}5\ m$

$r_2 = 1{,}51\ m$

$L = 100\ m$

De la ecuación (14) de la ley de Fick:

$$\dot{m}_A = -\rho \cdot D_{AB} \cdot A \cdot \frac{dw_A}{dr}$$

Donde: $A = 2\pi rL$

Reemplazando, ordenando e integrando:

$$\dot{m}_A \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\rho \cdot D_{AB} \cdot 2\pi L \cdot \int_{w_{A,1}}^{w_{A,2}} dw_A$$

$$\dot{m}_A = \frac{2\pi \cdot L \cdot \rho \cdot D_{AB} \cdot (w_{A,1} - w_{A,2})}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

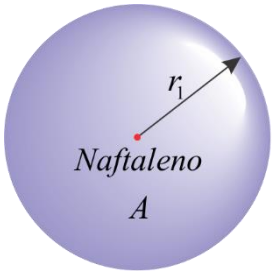
$$\dot{m}_A = \frac{2\pi \cdot (100\ m) \cdot \left(7854\ \frac{kg}{m^3}\right) \cdot \left(2{,}9 \times 10^{-13}\ \frac{m^2}{s}\right) \cdot (1{,}847 \times 10^{-10} - 0)}{\ln\left(\frac{1{,}51\ m}{1{,}5\ m}\right)}$$

$$\dot{m}_A = 3{,}976 \times 10^{-14}\ \frac{kg}{s}$$

**Problema 5:** Estime el tiempo necesario para la evaporación completa de una esfera de naftaleno de 1 cm de diámetro en aire atmosférico a 318 K. Si la temperatura de la superficie de la esfera estuviera en equilibrio térmico con el aire ambiente (misma temperatura), la presión de vapor del naftaleno será de $1{,}06\times10^4$ Pa y su densidad de $1{,}14\times10^3$ kg/m$^3$. En estas mismas condiciones, la difusividad del gas de naftaleno en el aire es $D_{AB}=6{,}9\times10^{-7}$ m$^2$/s.

$$MM_{Naftaleno} = 128{,}7\ \frac{kg}{kmol}$$

*Solución:*




$$Aire$$
$$T = 318\,K$$
$$D_{AB} = 6{,}9\times10^{-7}\ \frac{m^2}{s}$$

$$r_1 = 0{,}5\,cm$$
$$P_A = 1{,}06\times10^4\ Pa$$
$$densidad = 1{,}14\times10^3\ \frac{kg}{m^3}$$

De la ecuación de Fick:

$$\dot{n}_A = -C \cdot D_{AB} \cdot A \cdot \frac{dy_A}{dr}$$

$$\dot{n}_A = -C \cdot D_{AB} \cdot (4\pi r^2) \cdot \frac{dy_A}{dr}$$

$$\dot{n}_A \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -C \cdot D_{AB} \cdot 4\pi \cdot \int_{y_{A,1}}^{y_{A,2}} dy_A$$

$$-\dot{n}_A \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = -C \cdot D_{AB} \cdot 4\pi \cdot \left(y_{A,2} - y_{A,1}\right)$$

$$\dot{n}_A = \frac{4\pi \cdot C \cdot D_{AB} \cdot \left(y_{A,1} - y_{A,2}\right)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}}$$

Pero: $y_{A,2} = 0$ cuando $r_2 = \infty$

$$\dot{n}_A = 4\pi \cdot r_1 \cdot C \cdot D_{AB} \cdot y_{A,1} \quad (1)$$

Como hay variación del tamaño de la esfera y esta variación es pequeña comparada con el camino de la difusión (desde $r_1 = 0{,}5\ cm$ hasta $r_2 = 0$) entonces podemos usar un modelo de régimen pseudopermanente.

El flujo molar total para la superficie es:

$$\dot{n}_A = -C_A \cdot (4\pi r^2) \cdot \frac{dr}{dt}$$

$$\dot{n}_A \cdot \int_0^t dt = -4\pi \cdot C_A \cdot \int_{r_1}^{r_2=0} r^2\, dr$$

$$\dot{n}_A \cdot t = -4\pi \cdot C_A \cdot \frac{(0 - {r_1}^3)}{3}$$

$$\dot{n}_A = \frac{4\pi \cdot C_A \cdot {r_1}^3}{3 \cdot t} \quad (2)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2):

$$4\pi \cdot r_1 \cdot C \cdot D_{AB} \cdot y_{A,1} = \frac{4\pi \cdot C_A \cdot {r_1}^3}{3 \cdot t}$$

$$t = \frac{C_A \cdot {r_1}^2}{3 \cdot C \cdot D_{AB} \cdot y_{A,1}} \quad (3)$$

$$y_{A,1} = \frac{P_A}{P} = \frac{1{,}06 \times 10^4\ Pa}{101\,325\ Pa} = 0{,}1046$$

La concentración del naftaleno será:

$$C_A = \frac{\rho_A}{MM_A} = \frac{1{,}14 \times 10^3 \ \frac{kg}{m^3}}{128{,}7 \ \frac{kg}{kmol}} = 8{,}858 \ \frac{kmol}{m^3}$$

La concentración total se puede calcular como la concentración del aire:

$$C = \frac{n}{V} = \frac{P}{R \cdot T} = \frac{1 \ atm}{\left(0{,}082 \ \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K}\right)(318 \ K) \times \frac{1 \ m^3}{10^3 \ L}} = 38{,}35 \ \frac{mol}{m^3}$$

Reemplazando en la ecuación (3):

$$t = \frac{\left(8{,}858 \ \frac{kmol}{m^3}\right) \cdot (0{,}005 \ m)^2}{3 \cdot \left(38{,}35 \ \frac{mol}{m^3}\right) \cdot \left(6{,}9 \times 10^{-7} \ \frac{m^2}{s}\right) \cdot (0{,}1046) \times \frac{1 \ kmol}{10^3 \ mol}}$$

$$t = 26\,530{,}7 \ s = 7{,}4 \ h$$

## 2.2. Difusión en estado no estacionario - Segunda ley de Fick:

El estado estacionario, en el cual las condiciones permanecen invariables con el tiempo, no se encuentra con facilidad entre los problemas de ingeniería. En la mayoría de los casos, se da la difusión en estado no estacionario, en el cual la concentración del soluto en cualquier punto del material cambiará con el tiempo.

Supongamos el caso de que una especie química A se difunde en otra especie química B. A medida que el tiempo progresa, la concentración del soluto en cualquier punto del sólido en la dirección *z* aumentará, como se indica en los tiempos $t_1$ y $t_2$.

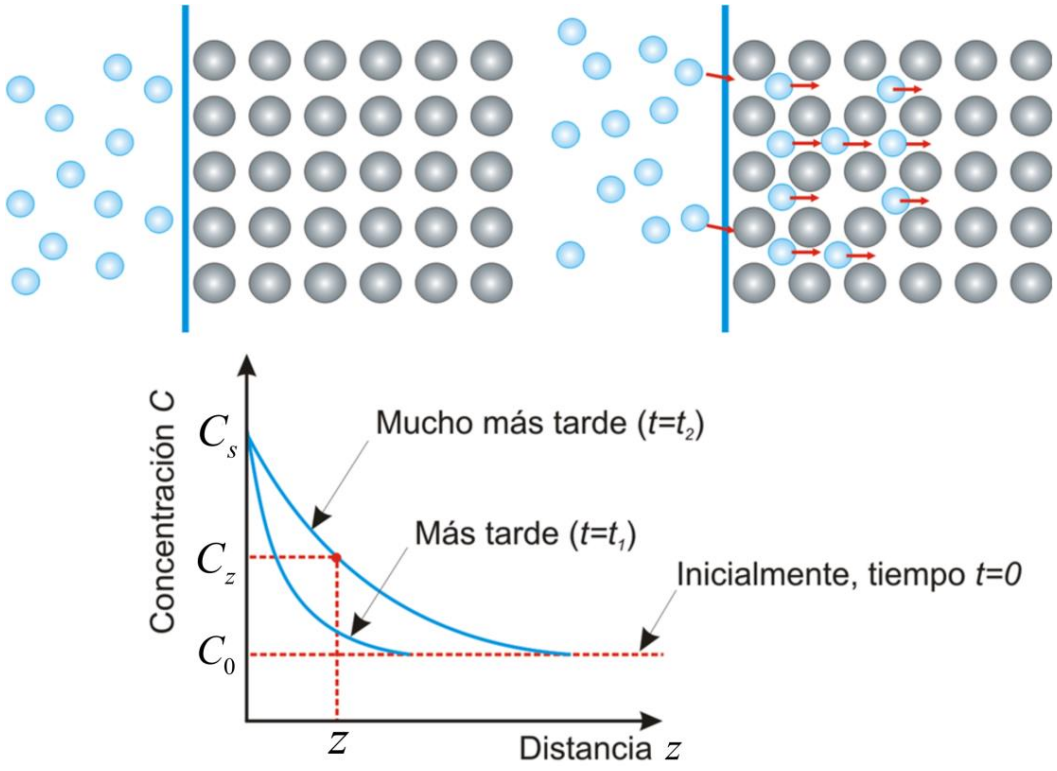



**Figura 3:** Difusión en estado no estacionario

Para la difusión de la especie química *A*, en condiciones no estacionarias:

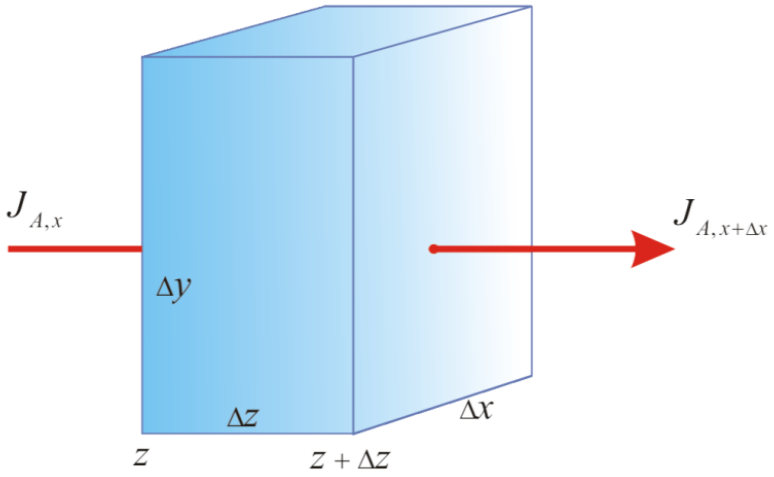



**Figura 4:** Difusión en estado no estacionario – Deducción de la segunda ley de Fick

Balanceando el componente *A* en términos molares, en ausencia de generación:

$$\begin{matrix}\text{Velocidad de}\\ \text{entrada de A}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{Velocidad de}\\ \text{salida de A}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Velocidad}\\ \text{acumulada de A}\end{matrix}$$

$$J_{A,z} = J_{A,z+\Delta z} + \Delta z \cdot \frac{\partial C_A}{\partial t}$$

$$-D_{AB} \cdot \left.\frac{\partial C_A}{\partial z}\right|_z = -D_{AB} \cdot \left.\frac{\partial C_A}{\partial z}\right|_{z+\Delta z} + \Delta z \cdot \frac{\partial C_A}{\partial t}$$

Ordenando:

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = \frac{D_{AB} \cdot \left.\frac{\partial C_A}{\partial z}\right|_{z+\Delta z} - D_{AB} \cdot \left.\frac{\partial C_A}{\partial z}\right|_z}{\Delta z}$$

Llevando al límite, cuando $\Delta z$ tiende a cero, se obtiene la Segunda ley de Fick:

$$\frac{dC_A}{dt} = \frac{d}{dz}\left(D_{AB} \cdot \frac{dC_A}{dz}\right) \quad (27)$$

Si el coeficiente de difusión es independiente de la composición, lo cual debe comprobarse para cada situación particular, la ecuación anterior se simplifica a:

$$\frac{dC_A}{dt} = D_{AB} \cdot \frac{d^2 C_A}{dz^2} \quad (28)$$

Para difusión en las tres dimensiones, se tiene:

$$\frac{dC_A}{dt} = D_{AB} \cdot \left[ \frac{d^2C_A}{dx^2} + \frac{d^2C_A}{dy^2} + \frac{d^2C_A}{dz^2} \right] \quad (29)$$

Las soluciones a la ecuación (28) se consiguen especificando condiciones límites físicamente significativas.

En la práctica, una solución importante es la de un sólido semiinfinito cuya concentración superficial se mantiene constante, donde se plantean las siguientes hipótesis:

1) Antes de la difusión, todos los átomos de soluto están uniformemente distribuidos en el sólido a concentración $C_{A,i}$.

2) El valor de *z* en la superficie es cero y aumenta con la distancia dentro del sólido.

3) El tiempo se toma igual a cero en el instante inmediatamente antes de empezar la difusión.

Estas condiciones límite son:

Para $t = 0$, $C = C_{A,i}$ a $0 \le z \le \infty$

Para $t > 0$, $C = C_{A,s}$ (la concentración superficial constante) $z = 0$

$C = C_{A,i}$ a $z = \infty$

Aplicando las condiciones límites a la ecuación (28), se obtiene:

$$\frac{C_{A,z} - C_{A,i}}{C_{A,s} - C_{A,i}} = 1 - erf\left( \frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}} \right) \quad (30)$$

Donde:

$C_{A,z}$ : Concentración de la especie A a la distancia *z* de la superficie en un tiempo *t*.

$C_{A,i}$ : Concentración inicial uniforme de la especie A, en el instante *t=0*.

$C_{A,s}$ : Concentración de la especie A en la superficie del sólido.

$z$ : Distancia desde la superficie.

$D_{AB}$ : Coeficiente de difusión.

$erf$ : Función de error gaussiana[3].

$t$ : Tiempo.

Esta ecuación, también puede ser escrita en términos de la función de error complementaria[4] ($erfc$).

$$\frac{C_{A,z} - C_{A,i}}{C_{A,s} - C_{A,i}} = erfc\left(\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}\right) \quad (31)$$

En la tabla siguiente se dan los datos para varios valores de $\beta = \frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}$.

[3] Esta función de error gaussiana se define por:

$$erf(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\beta} e^{-u^2} \cdot du$$

donde $\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}$ se ha reemplazado por la variable $\beta$.

[4] Esta función se define como:

$$erfc(\beta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\beta} e^{-u^2} \cdot du$$

**Tabla 01: Valores de la función error ( $erf$ ) y la función de error complementaria ( $erfc$ )**

$$ferr(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \qquad \text{y} \qquad ferCom(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$$

| x | Ferr | FerCom | x | Ferr | FerCom | x | Ferr | FerCom | x | Ferr | FerCom | x | Ferr | FerCom | x | Ferr | FerCom |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,00** | 0,000000 | 1,000000 | 0,51 | 0,529244 | 0,470756 | 1,02 | 0,850838 | 0,149162 | 1,53 | 0,969516 | 0,030484 | 2,04 | 0,996086 | 0,003914 | 2,55 | 0,999689 | 0,000311 |
| **0,01** | 0,011283 | 0,988717 | 0,52 | 0,537899 | 0,462101 | 1,03 | 0,854784 | 0,145216 | 1,54 | 0,970586 | 0,029414 | 2,05 | 0,996258 | 0,003742 | 2,56 | 0,999706 | 0,000294 |
| **0,02** | 0,022565 | 0,977435 | 0,53 | 0,546464 | 0,453536 | 1,04 | 0,858650 | 0,141350 | 1,55 | 0,971623 | 0,028377 | 2,06 | 0,996423 | 0,003577 | 2,57 | 0,999722 | 0,000278 |
| **0,03** | 0,033841 | 0,966159 | 0,54 | 0,554939 | 0,445061 | 1,05 | 0,862436 | 0,137564 | 1,56 | 0,972628 | 0,027372 | 2,07 | 0,996582 | 0,003418 | 2,58 | 0,999736 | 0,000264 |
| **0,04** | 0,045111 | 0,954889 | 0,55 | 0,563323 | 0,436677 | 1,06 | 0,866144 | 0,133856 | 1,57 | 0,973603 | 0,026397 | 2,08 | 0,996734 | 0,003266 | 2,59 | 0,999751 | 0,000249 |
| **0,05** | 0,056372 | 0,943628 | 0,56 | 0,571616 | 0,428384 | 1,07 | 0,869773 | 0,130227 | 1,58 | 0,974547 | 0,025453 | 2,09 | 0,996880 | 0,003120 | 2,60 | 0,999764 | 0,000236 |
| **0,06** | 0,067622 | 0,932378 | 0,57 | 0,579816 | 0,420184 | 1,08 | 0,873326 | 0,126674 | 1,59 | 0,975462 | 0,024538 | 2,10 | 0,997021 | 0,002979 | 2,61 | 0,999777 | 0,000223 |
| **0,07** | 0,078858 | 0,921142 | 0,58 | 0,587923 | 0,412077 | 1,09 | 0,876803 | 0,123197 | 1,60 | 0,976348 | 0,023652 | 2,11 | 0,997155 | 0,002845 | 2,62 | 0,999789 | 0,000211 |
| **0,08** | 0,090078 | 0,909922 | 0,59 | 0,595936 | 0,404064 | 1,10 | 0,880205 | 0,119795 | 1,61 | 0,977207 | 0,022793 | 2,12 | 0,997284 | 0,002716 | 2,63 | 0,999800 | 0,000200 |
| **0,09** | 0,101281 | 0,898719 | 0,60 | 0,603856 | 0,396144 | 1,11 | 0,883533 | 0,116467 | 1,62 | 0,978038 | 0,021962 | 2,13 | 0,997407 | 0,002593 | 2,64 | 0,999811 | 0,000189 |
| **0,10** | 0,112463 | 0,887537 | 0,61 | 0,611681 | 0,388319 | 1,12 | 0,886788 | 0,113212 | 1,63 | 0,978843 | 0,021157 | 2,14 | 0,997525 | 0,002475 | 2,65 | 0,999822 | 0,000178 |
| **0,11** | 0,123623 | 0,876377 | 0,62 | 0,619411 | 0,380589 | 1,13 | 0,889971 | 0,110029 | 1,64 | 0,979622 | 0,020378 | 2,15 | 0,997639 | 0,002361 | 2,66 | 0,999831 | 0,000169 |
| **0,12** | 0,134758 | 0,865242 | 0,63 | 0,627046 | 0,372954 | 1,14 | 0,893082 | 0,106918 | 1,65 | 0,980376 | 0,019624 | 2,16 | 0,997747 | 0,002253 | 2,67 | 0,999841 | 0,000159 |
| **0,13** | 0,145867 | 0,854133 | 0,64 | 0,634586 | 0,365414 | 1,15 | 0,896124 | 0,103876 | 1,66 | 0,981105 | 0,018895 | 2,17 | 0,997851 | 0,002149 | 2,68 | 0,999849 | 0,000151 |
| **0,14** | 0,156947 | 0,843053 | 0,65 | 0,642029 | 0,357971 | 1,16 | 0,899096 | 0,100904 | 1,67 | 0,981810 | 0,018190 | 2,18 | 0,997951 | 0,002049 | 2,69 | 0,999858 | 0,000142 |
| **0,15** | 0,167996 | 0,832004 | 0,66 | 0,649377 | 0,350623 | 1,17 | 0,902000 | 0,098000 | 1,68 | 0,982493 | 0,017507 | 2,19 | 0,998046 | 0,001954 | 2,70 | 0,999866 | 0,000134 |
| **0,16** | 0,179012 | 0,820988 | 0,67 | 0,656628 | 0,343372 | 1,18 | 0,904837 | 0,095163 | 1,69 | 0,983153 | 0,016847 | 2,20 | 0,998137 | 0,001863 | 2,71 | 0,999873 | 0,000127 |
| **0,17** | 0,189992 | 0,810008 | 0,68 | 0,663782 | 0,336218 | 1,19 | 0,907608 | 0,092392 | 1,70 | 0,983790 | 0,016210 | 2,21 | 0,998224 | 0,001776 | 2,72 | 0,999880 | 0,000120 |
| **0,18** | 0,200936 | 0,799064 | 0,69 | 0,670840 | 0,329160 | 1,20 | 0,910314 | 0,089686 | 1,71 | 0,984407 | 0,015593 | 2,22 | 0,998308 | 0,001692 | 2,73 | 0,999887 | 0,000113 |
| **0,19** | 0,211840 | 0,788160 | 0,70 | 0,677801 | 0,322199 | 1,21 | 0,912955 | 0,087045 | 1,72 | 0,985003 | 0,014997 | 2,23 | 0,998388 | 0,001612 | 2,74 | 0,999893 | 0,000107 |
| **0,20** | 0,222703 | 0,777297 | 0,71 | 0,684665 | 0,315335 | 1,22 | 0,915534 | 0,084466 | 1,73 | 0,985578 | 0,014422 | 2,24 | 0,998464 | 0,001536 | 2,75 | 0,999899 | 0,000101 |
| **0,21** | 0,233522 | 0,766478 | 0,72 | 0,691433 | 0,308567 | 1,23 | 0,918050 | 0,081950 | 1,74 | 0,986135 | 0,013865 | 2,25 | 0,998537 | 0,001463 | 2,76 | 0,999905 | 0,000095 |
| **0,22** | 0,244296 | 0,755704 | 0,73 | 0,698104 | 0,301896 | 1,24 | 0,920505 | 0,079495 | 1,75 | 0,986672 | 0,013328 | 2,26 | 0,998607 | 0,001393 | 2,77 | 0,999910 | 0,000090 |
| **0,23** | 0,255023 | 0,744977 | 0,74 | 0,704678 | 0,295322 | 1,25 | 0,922900 | 0,077100 | 1,76 | 0,987190 | 0,012810 | 2,27 | 0,998674 | 0,001326 | 2,78 | 0,999916 | 0,000084 |
| **0,24** | 0,265700 | 0,734300 | 0,75 | 0,711155 | 0,288845 | 1,26 | 0,925236 | 0,074764 | 1,77 | 0,987691 | 0,012309 | 2,28 | 0,998738 | 0,001262 | 2,79 | 0,999920 | 0,000080 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0,25** | 0,276326 | 0,723674 | 0,76 | 0,717537 | 0,282463 | 1,27 | 0,927514 | 0,072486 | 1,78 | 0,988174 | 0,011826 | 2,29 | 0,998799 | 0,001201 | 2,80 | 0,999925 | 0,000075 |
| **0,26** | 0,286900 | 0,713100 | 0,77 | 0,723821 | 0,276179 | 1,28 | 0,929734 | 0,070266 | 1,79 | 0,988641 | 0,011359 | 2,30 | 0,998857 | 0,001143 | 2,81 | 0,999929 | 0,000071 |
| **0,27** | 0,297418 | 0,702582 | 0,78 | 0,730010 | 0,269990 | 1,29 | 0,931899 | 0,068101 | 1,80 | 0,989091 | 0,010909 | 2,31 | 0,998912 | 0,001088 | 2,82 | 0,999933 | 0,000067 |
| **0,28** | 0,307880 | 0,692120 | 0,79 | 0,736103 | 0,263897 | 1,30 | 0,934008 | 0,065992 | 1,81 | 0,989525 | 0,010475 | 2,32 | 0,998966 | 0,001034 | 2,83 | 0,999937 | 0,000063 |
| **0,29** | 0,318283 | 0,681717 | 0,80 | 0,742101 | 0,257899 | 1,31 | 0,936063 | 0,063937 | 1,82 | 0,989943 | 0,010057 | 2,33 | 0,999016 | 0,000984 | 2,84 | 0,999941 | 0,000059 |
| **0,30** | 0,328627 | 0,671373 | 0,81 | 0,748003 | 0,251997 | 1,32 | 0,938065 | 0,061935 | 1,83 | 0,990347 | 0,009653 | 2,34 | 0,999065 | 0,000935 | 2,85 | 0,999944 | 0,000056 |
| **0,31** | 0,338908 | 0,661092 | 0,82 | 0,753811 | 0,246189 | 1,33 | 0,940015 | 0,059985 | 1,84 | 0,990736 | 0,009264 | 2,35 | 0,999111 | 0,000889 | 2,86 | 0,999948 | 0,000052 |
| **0,32** | 0,349126 | 0,650874 | 0,83 | 0,759524 | 0,240476 | 1,34 | 0,941914 | 0,058086 | 1,85 | 0,991111 | 0,008889 | 2,36 | 0,999155 | 0,000845 | 2,87 | 0,999951 | 0,000049 |
| **0,33** | 0,359279 | 0,640721 | 0,84 | 0,765143 | 0,234857 | 1,35 | 0,943762 | 0,056238 | 1,86 | 0,991472 | 0,008528 | 2,37 | 0,999197 | 0,000803 | 2,88 | 0,999954 | 0,000046 |
| **0,34** | 0,369365 | 0,630635 | 0,85 | 0,770668 | 0,229332 | 1,36 | 0,945561 | 0,054439 | 1,87 | 0,991821 | 0,008179 | 2,38 | 0,999237 | 0,000763 | 2,89 | 0,999956 | 0,000044 |
| **0,35** | 0,379382 | 0,620618 | 0,86 | 0,776100 | 0,223900 | 1,37 | 0,947312 | 0,052688 | 1,88 | 0,992156 | 0,007844 | 2,39 | 0,999275 | 0,000725 | 2,90 | 0,999959 | 0,000041 |
| **0,36** | 0,389330 | 0,610670 | 0,87 | 0,781440 | 0,218560 | 1,38 | 0,949016 | 0,050984 | 1,89 | 0,992479 | 0,007521 | 2,40 | 0,999311 | 0,000689 | 2,91 | 0,999961 | 0,000039 |
| **0,37** | 0,399206 | 0,600794 | 0,88 | 0,786687 | 0,213313 | 1,39 | 0,950673 | 0,049327 | 1,90 | 0,992790 | 0,007210 | 2,41 | 0,999346 | 0,000654 | 2,92 | 0,999964 | 0,000036 |
| **0,38** | 0,409009 | 0,590991 | 0,89 | 0,791843 | 0,208157 | 1,40 | 0,952285 | 0,047715 | 1,91 | 0,993090 | 0,006910 | 2,42 | 0,999379 | 0,000621 | 2,93 | 0,999966 | 0,000034 |
| **0,39** | 0,418739 | 0,581261 | 0,90 | 0,796908 | 0,203092 | 1,41 | 0,953852 | 0,046148 | 1,92 | 0,993378 | 0,006622 | 2,43 | 0,999411 | 0,000589 | 2,94 | 0,999968 | 0,000032 |
| **0,40** | 0,428392 | 0,571608 | 0,91 | 0,801883 | 0,198117 | 1,42 | 0,955376 | 0,044624 | 1,93 | 0,993656 | 0,006344 | 2,44 | 0,999441 | 0,000559 | 2,95 | 0,999970 | 0,000030 |
| **0,41** | 0,437969 | 0,562031 | 0,92 | 0,806768 | 0,193232 | 1,43 | 0,956857 | 0,043143 | 1,94 | 0,993923 | 0,006077 | 2,45 | 0,999469 | 0,000531 | 2,96 | 0,999972 | 0,000028 |
| **0,42** | 0,447468 | 0,552532 | 0,93 | 0,811563 | 0,188437 | 1,44 | 0,958297 | 0,041703 | 1,95 | 0,994179 | 0,005821 | 2,46 | 0,999497 | 0,000503 | 2,97 | 0,999973 | 0,000027 |
| **0,43** | 0,456887 | 0,543113 | 0,94 | 0,816271 | 0,183729 | 1,45 | 0,959695 | 0,040305 | 1,96 | 0,994426 | 0,005574 | 2,47 | 0,999523 | 0,000477 | 2,98 | 0,999975 | 0,000025 |
| **0,44** | 0,466225 | 0,533775 | 0,95 | 0,820891 | 0,179109 | 1,46 | 0,961054 | 0,038946 | 1,97 | 0,994664 | 0,005336 | 2,48 | 0,999547 | 0,000453 | 2,99 | 0,999976 | 0,000024 |
| **0,45** | 0,475482 | 0,524518 | 0,96 | 0,825424 | 0,174576 | 1,47 | 0,962373 | 0,037627 | 1,98 | 0,994892 | 0,005108 | 2,49 | 0,999571 | 0,000429 | 3,00 | 0,999978 | 0,000022 |
| **0,46** | 0,484655 | 0,515345 | 0,97 | 0,829870 | 0,170130 | 1,48 | 0,963654 | 0,036346 | 1,99 | 0,995111 | 0,004889 | 2,50 | 0,999593 | 0,000407 | 3,01 | 0,999979 | 0,000021 |
| **0,47** | 0,493745 | 0,506255 | 0,98 | 0,834231 | 0,165769 | 1,49 | 0,964898 | 0,035102 | 2,00 | 0,995322 | 0,004678 | 2,51 | 0,999614 | 0,000386 | 3,02 | 0,999981 | 0,000019 |
| **0,48** | 0,502750 | 0,497250 | 0,99 | 0,838508 | 0,161492 | 1,50 | 0,966105 | 0,033895 | 2,01 | 0,995525 | 0,004475 | 2,52 | 0,999635 | 0,000365 | 3,03 | 0,999982 | 0,000018 |
| **0,49** | 0,511668 | 0,488332 | 1,00 | 0,842701 | 0,157299 | 1,51 | 0,967277 | 0,032723 | 2,02 | 0,995719 | 0,004281 | 2,53 | 0,999654 | 0,000346 | 3,04 | 0,999983 | 0,000017 |
| **0,50** | 0,520500 | 0,479500 | 1,01 | 0,846810 | 0,153190 | 1,52 | 0,968413 | 0,031587 | 2,03 | 0,995906 | 0,004094 | 2,54 | 0,999672 | 0,000328 | 3,05 | 0,999984 | 0,000016 |

Además la ecuación (30), también puede escribirse utilizando las siguientes definiciones:

- **Fracción molar:**

$$\frac{y_{A,z} - y_{A,i}}{y_{A,s} - y_{A,i}} = erfc\left(\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}\right) \quad (32)$$

- **Fracción de masa:**

$$\frac{w_{A,z} - w_{A,i}}{w_{A,s} - w_{A,i}} = erfc\left(\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}\right) \quad (33)$$

- **Densidad:**

$$\frac{\rho_{A,z} - \rho_{A,i}}{\rho_{A,s} - \rho_{A,i}} = erfc\left(\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}\right) \quad (34)$$

**Problema 1:** Una pieza sobrecalentada de hierro dulce, cuya concentración inicial es de 0,20% por peso de carbono, se expone a una atmosfera carburante durante 1 hora. En las condiciones del proceso, la concentración superficial del carbono es de 0,70%. Si la difusividad del carbono en el acero es de 1,0×10-11 m2/s, a la temperatura del proceso, determínese la composición del carbono a 0,01 cm, 0,02 cm y 0,04 cm bajo la superficie.

*Solución:*

Utilizando la ecuación (33):

$$\frac{w_{A,z} - w_{A,i}}{w_{A,s} - w_{A,i}} = erfc\left[\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}\right]$$

Datos:

$w_{A,i} = 0{,}20\%$

$w_{A,s} = 0{,}70\%$

$t = 1\ h = 3600\ s$

$D_{AB} = 1{,}0 \times 10^{-11}\ \frac{m^2}{s}$

A la profundidad de $z = 1{,}0 \times 10^{-4}\ m$:

$$\frac{w_{A,z} - 0{,}002}{0{,}007 - 0{,}002} = erfc[0{,}2635]$$

$$\frac{w_{A,z} - 0{,}002}{0{,}007 - 0{,}002} = 0{,}7094$$

$$w_{A,z} = 0{,}005547 \text{ o } 0{,}5547\% \text{ de carbono}$$

A la profundidad de $z = 2{,}0 \times 10^{-4}\ m$:

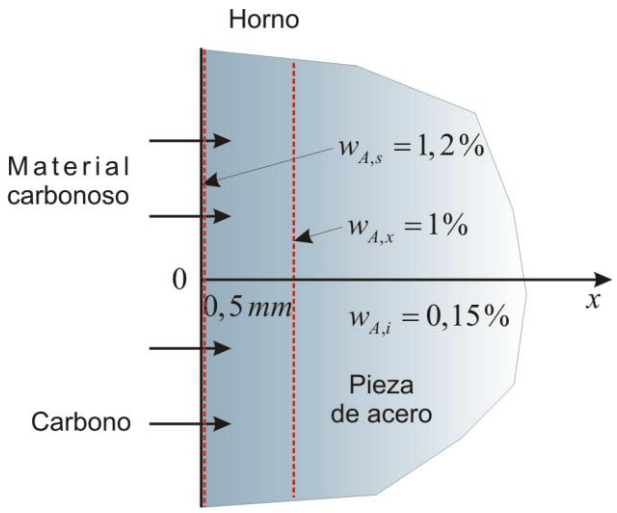
$$w_{A,z} = 0{,}004281 \text{ o } 0{,}4281\% \text{ de carbono}$$

A la profundidad de $z = 4{,}0 \times 10^{-4}\ m$:

$$w_{A,z} = 0{,}002681 \text{ o } 0{,}2681\% \text{ de carbono}$$

**Problema 2:** Comúnmente, se endurece la superficie de una pieza de acero dulce empacándola en un material carbonoso, dentro de un horno a una temperatura elevada, durante un tiempo predeterminado. Considere una de esas piezas con una concentración inicial uniforme de carbono de 0,15% en masa. Ahora se empaca la pieza en un material carbonoso y se coloca en un horno a temperatura elevada. Se sabe que el coeficiente de difusión del carbono en el acero, a la temperatura del horno, es $4{,}8\times10^{-10}$ $m^2/s$, y se determina que la concentración de equilibrio del carbono en el hierro, en la interfase, es de 1,2% en masa. Determine cuánto tiempo debe mantenerse la pieza en el horno para que la concentración de masa del carbono a 0,5 mm por debajo de la superficie alcance 1%.

*Solución:*



Utilizando la ecuación (33):

$$\frac{w_{A,z} - w_{A,i}}{w_{A,s} - w_{A,i}} = erfc\left[\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}\right]$$

$$\frac{0{,}01 - 0{,}0015}{0{,}012 - 0{,}0015} = erfc\left[\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}\right]$$

$$0{,}81 = erfc\left[\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}\right]$$

Se tiene:

$$\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}} = 0{,}17$$

Despejando:

$$t = \frac{z^2}{4 \cdot D_{AB} \cdot (0{,}17)^2} = \frac{(0{,}0005\ m)^2}{4 \cdot \left(4{,}8 \times 10^{-10}\ \frac{m^2}{s}\right) \cdot (0{,}17)^2}$$

$$t = 4505\ s = 1\ h\ 15\ min$$

La pieza de acero debe mantenerse en el horno durante 1 h y 15 min para lograr el nivel deseado de endurecimiento.

**Problema 3:** Se pretende cementar un acero con 0,1% de carbono, mantenido en un ambiente a 12% de carbono en alta temperatura, hasta que se alcance 0,45% de carbono en una profundidad de 2 mm por debajo de la superficie. Cuál es el tiempo total de cementación si el coeficiente de difusión es 2×10-11 m2/s.

*Solución:*

Utilizando la ecuación:

$$\frac{w_{A,z} - w_{A,i}}{w_{A,s} - w_{A,i}} = erfc\left[\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}\right]$$

$$\frac{0{,}0045 - 0{,}001}{0{,}012 - 0{,}001} = erfc\left[\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}\right]$$

$$0{,}31818 = erfc\left[\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}\right]$$

Se tiene:

$$\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}} = 0{,}71$$

Despejando:

$$t = \frac{z^2}{4 \cdot D_{AB} \cdot (0{,}71)^2} = \frac{(0{,}002\ m)^2}{4 \cdot \left(2 \times 10^{-11}\ \frac{m^2}{s}\right) \cdot (0{,}71)^2}$$

$$t = 99\,186{,}67\ s = 27\ h\ 36\ min$$

**Problema 4:** Determinar el tiempo necesario para alcanzar una concentración del 0,30% de carbono a 4 mm de la superficie de una aleación hierro-carbono que inicialmente contenía 0,10% de carbono. La concentración de la superficie se mantiene a 0,90% de carbono y la probeta se calienta a 1100 °C. Utilizar $D_{AB} = 7{,}0 \times 10^{-11}\ \frac{m^2}{s}$.

*Solución:*

Utilizando la ecuación:

$$\frac{w_{A,z} - w_{A,i}}{w_{A,s} - w_{A,i}} = erfc\left[\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}\right]$$

$$\frac{0{,}0030 - 0{,}0010}{0{,}0090 - 0{,}0010} = erfc\left[\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}\right]$$

$$0{,}25 = erfc\left[\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}\right]$$

Se tiene:

$$\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}} = 0{,}81$$

Despejando:

$$t = \frac{z^2}{4 \cdot D_{AB} \cdot (0{,}81)^2} = \frac{(0{,}004\ m)^2}{4 \cdot \left(7{,}0 \times 10^{-11}\ \frac{m^2}{s}\right) \cdot (0{,}81)^2}$$

$$t = 87\,094{,}7\ s = 24\ h\ 12\ min$$

**Problema 5:** Se carburiza acero en un proceso de alta temperatura que depende de la transferencia de carbón por difusión. El valor del coeficiente de difusión es fuertemente dependiente de la temperatura y se puede aproximar como:

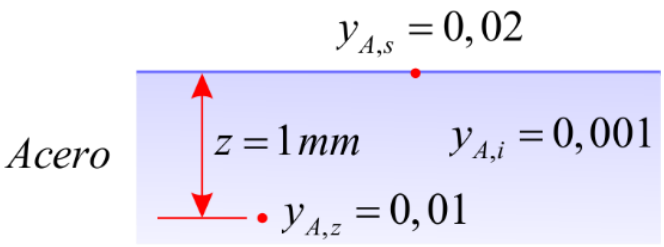
$$D_{AB} = 2 \times 10^{-5} e^{\frac{-17\,000}{T(K)}} \frac{m^2}{s}$$

Si el proceso se efectúa a 1000 °C y se mantiene una fracción molar de carbón de 0,02 en la superficie del acero, ¿Cuánto tiempo se requiere para elevar el contenido de carbón en el acero de un valor inicial de 0,1% a un valor del 1,0% a una profundidad de 1 mm?

*Solución:*

$T = 1000\ °C = 1273\ K$

$$D_{AB} = 2 \times 10^{-5} e^{\frac{-17\,000}{1\,273}} \frac{m^2}{s} = 3{,}172 \times 10^{-11} \frac{m^2}{s}$$




Utilizando la ecuación:

$$\frac{y_{A,z} - y_{A,i}}{y_{A,s} - y_{A,i}} = erfc\left[\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}\right]$$

$$\frac{0,01 - 0,001}{0,02 - 0,001} = erfc\left[\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}\right]$$

$$0,47368 = erfc\left[\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}}\right]$$

Se tiene:

$$\frac{z}{2 \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot t}} = 0,51$$

Despejando:

$$t = \frac{z^2}{4 \cdot D_{AB} \cdot (0{,}81)^2} = \frac{(0{,}001\ m)^2}{4 \cdot \left(3{,}172 \times 10^{-11}\ \frac{m^2}{s}\right) \cdot (0{,}51)^2}$$

$$t = 30\ 301{,}7\ s = 8\ h\ 25\ min$$

# III. DIFUSIÓN MOLECULAR EN GASES

Las fuerzas intermoleculares en los gases son relativamente débiles. Esto debido a que contienen pocas moléculas por unidad de volumen, en donde cada molécula tiene pocas moléculas vecinas con las que pueda interactuar teniendo que recorrer distancias considerables antes de poder colisionar.

## 1. Contradifusión equimolar en gases:

Se presenta con frecuencia en las operaciones de destilación. Supongamos que se tienen dos cámaras grandes conectadas por un tubo, en donde se tienen los gases *A* y *B* a la presión total *P* que se mantiene constante. Ambas cámaras están siendo agitadas para mantener las concentraciones uniformes. Las presiones parciales están relacionadas como: $P_{A,1} > P_{A,2}$ y $P_{B,2} > P_{B,1}$, por lo que las moléculas de *A* se difunden hacia la derecha y las de B lo hacen hacia la izquierda. Como la presión total *P* se mantiene constante, los moles netos de *A* que se difunden hacia la derecha deben ser iguales a los moles netos de *B* que lo hacen hacia la izquierda, es decir:

$$J_A = -J_B \quad (35)$$

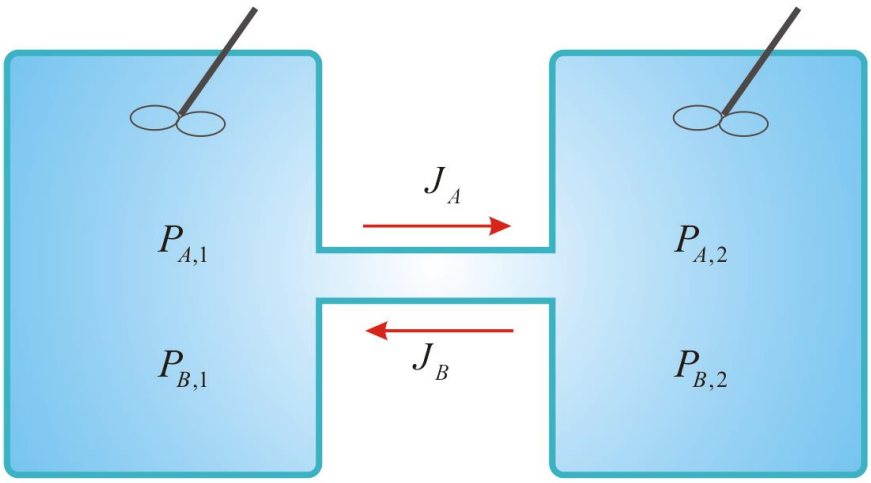



**Figura 5:** Contradifusión equimolar

El perfil de presiones será:

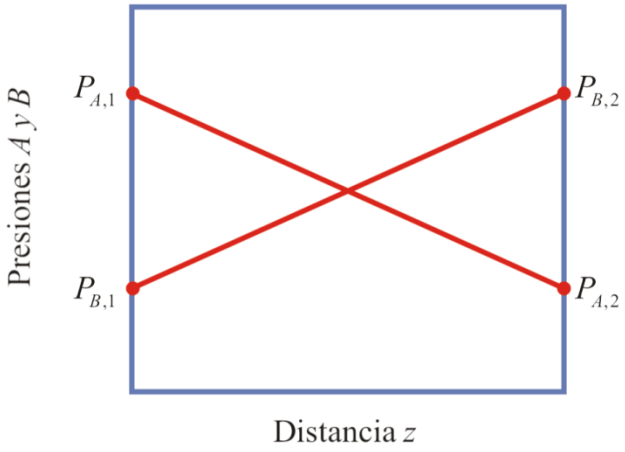



**Figura:** Perfil de las presiones parciales de A y B en función de z

Escribiendo la ley de Fick para *B* cuando *C* es constante (ecuación similar a la ecuación 25):

$$J_B = -D_{BA} \cdot \frac{dC_B}{dz} \quad (36)$$

Además se tiene:

$$C_A + C_B = C \quad (37)$$

Diferenciando:

$$dC_A = -dC_B \quad (38)$$

Reemplazando en la ecuación (35):

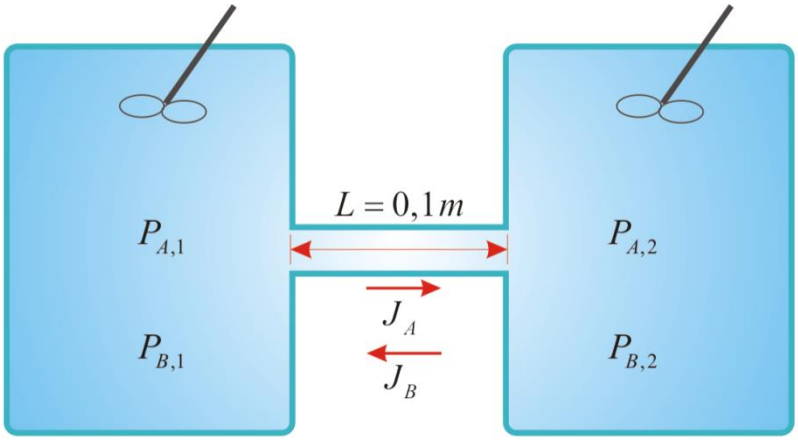
$$-D_{AB} \cdot \frac{dC_A}{dz} = -\left(-D_{BA} \cdot \frac{dC_B}{dz}\right)$$

$$D_{AB} \cdot \frac{dC_B}{dz} = D_{BA} \cdot \frac{dC_B}{dz}$$

$$D_{AB} = D_{BA} \quad (39)$$

Esto demuestra que en una mezcla gaseosa binaria de *A* y *B*, el coeficiente de difusividad ( $D_{AB}$ ) para la difusión de *A* en *B* es igual al coeficiente de difusividad para la difusión de *B* en *A* ( $D_{BA}$ ).

**Problema 1:** En un tubo uniforme de 0,10 m de largo se difunde amoniaco gaseoso (A) en $N_2$ gaseoso (B) a $1{,}0132\times10^5\ Pa$ de presión y 298 $K$. En el punto 1, $P_{A,1}=1{,}013\times10^4\ Pa$ y en el punto 2, $P_{A,2}=0{,}507\times10^4 Pa$. La difusividad $D_{AB}$ es $0{,}230\times10^{-4}\ m^2/s$.




a) Calcule el flujo específico $J_A$ en estado estacionario.

b) Repita para $J_B$.

*Solución:*

a) Aplicando la ecuación (26):

$$J_A=\frac{D_{AB}\cdot\left(P_{A,1}-P_{A,2}\right)}{R\cdot T\cdot\left(z_2-z_1\right)}=\frac{\left(0{,}230\times10^{-4}\,\frac{m^2}{s}\right)\cdot\left[\left(1{,}013\times10^4-0{,}507\times10^4\right)Pa\times\frac{1atm}{101325\,Pa}\right]}{\left(0{,}082\,\frac{atm\cdot L}{mol.K}\right)\cdot\left(298\,K\right)\cdot\left(0{,}1m\right)\times\frac{1m^3}{10^3\,L}}$$

$$J_A=4{,}7\times10^{-4}\,\frac{mol}{m^2\cdot s}$$

b) Para calcular $J_B$, modificaremos la ecuación (26) a:

$$J_B=\frac{D_{BA}\cdot\left(P_{B,1}-P_{B,2}\right)}{R\cdot T\cdot\left(z_2-z_1\right)}$$

Donde:

$$D_{BA}=D_{AB}=0{,}23\times10^{-4}\,\frac{m^2}{s}$$

$$P_{B,1} = P - P_{A,1} = 1{,}0132\times10^{5}\ Pa - 1{,}013\times10^{4}\ Pa = 9{,}119\times10^{4}\ Pa$$

$$P_{B,2} = P - P_{A,2} = 1{,}0132\times10^{5}\ Pa - 0{,}507\times10^{4}\ Pa = 9{,}625\times10^{4}\ Pa$$

Reemplazando en la ecuación anterior:

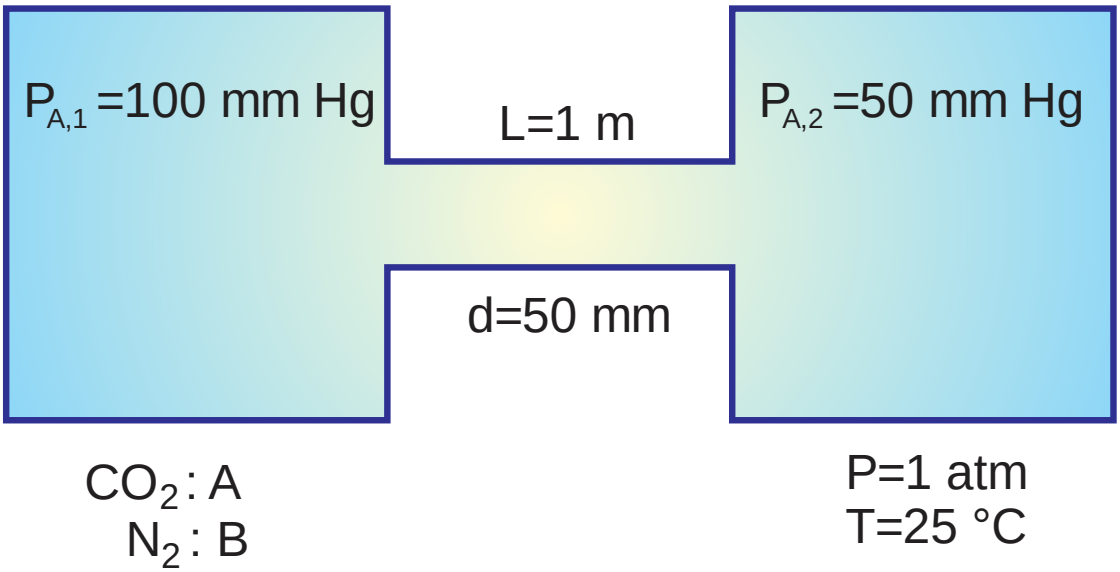
$$J_B = \frac{D_{BA}\cdot\left(P_{B,1}-P_{B,2}\right)}{R\cdot T\cdot\left(z_2-z_1\right)} = \frac{\left(0{,}230\times10^{-4}\,\frac{m^2}{s}\right)\cdot\left[\left(9{,}119\times10^{4}-9{,}625\times10^{4}\right)Pa\times\frac{1atm}{101325\,Pa}\right]}{\left(0{,}082\,\frac{atm\cdot L}{mol.K}\right)\cdot\left(298\,K\right)\cdot\left(0{,}1m\right)\times\frac{1m^3}{10^3\,L}}$$

$$J_B = -4{,}7\times10^{-4}\,\frac{mol}{m^2\cdot s}$$

**Problema 2:** Bióxido de carbono y nitrógeno experimentan contradifusión equimolar en un tubo circular, cuya longitud y diámetro son 1 m y 50 mm, respectivamente. El sistema está a una presión total de 1 atm y a una temperatura de 25 °C. los extremos de los tubos se conectan a cámaras grandes en las que las concentraciones de especies se mantienen a valores fijos, y la presión parcial de $CO_2$ en un extremo es 100 mm de Hg y en el otro extremo es de 50 mm de Hg. ¿Cuál es la rapidez de transferencia de masa del $CO_2$ a través del tubo?

La difusividad del $CO_2$ en el $N_2$ es $D_{AB} = 0{,}16\times10^{-4}\,\frac{m^2}{s}$

*Solución:*




De la ecuación de Fick:

$$\dot{n}_A = -D_{AB} \cdot A \cdot \frac{dC_A}{dz}$$

En donde:

$$C_A = \frac{n_A}{V} = \frac{P_A}{R \cdot T}$$

Reemplazando:

$$\dot{n}_A = -D_{AB} \cdot (\pi \cdot r^2) \cdot \frac{d\left(\frac{P_A}{R \cdot T}\right)}{dz}$$

$$\dot{n}_A = -\frac{D_{AB} \cdot (\pi \cdot r^2)}{R \cdot T} \cdot \frac{dP_A}{dz}$$

$$\dot{n}_A \cdot \int_{z_1}^{z_2} dz = -\frac{D_{AB} \cdot \pi \cdot r^2}{R \cdot T} \cdot \int_{P_{A,1}}^{P_{A,2}} dP_A$$

$$\dot{n}_A \cdot (z_2 - z_1) = -\frac{D_{AB} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(P_{A,2} - P_{A,1}\right)}{R \cdot T}$$

$$\dot{n}_A = \frac{D_{AB} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \left(P_{A,1} - P_{A,2}\right)}{R \cdot T \cdot (z_2 - z_1)}$$

Reemplazando datos:

$$\dot{n}_A = \frac{\left(0{,}16 \times 10^{-4} \frac{m^2}{s}\right) \cdot (3{,}14) \cdot (25 \times 10^{-3})^2 \cdot [(100 - 50) mm\ Hg] \cdot \frac{1\ atm}{760\ mm\ Hg}}{\left(0{,}082 \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K}\right) \cdot (298\ K) \cdot (1\ \text{m}) \cdot \frac{1\ m^3}{10^3\ L} \cdot \frac{10^3\ mol}{1\ kmol}}$$

$$\dot{n}_A = 8{,}454 \times 10^{-11} \frac{kmol}{s}$$

$$\dot{m}_A = \left(8{,}454 \times 10^{-11} \frac{kmol}{s}\right) \cdot \left(44\ \frac{kg}{kmol}\right) = 3{,}720 \times 10^{-9} \frac{kg}{s}$$

Aunque la transferencia molar del N2 en la dirección opuesta es:

$$\dot{n}_B = -8{,}454 \times 10^{-11} \frac{kmol}{s}$$

La razón de transferencia de masa es:

$$\dot{m}_A = \left(-8{,}454 \times 10^{-11} \frac{kmol}{s}\right) \cdot \left(28\ \frac{kg}{kmol}\right) = 2{,}367 \times 10^{-9} \frac{kg}{s}$$

**2. Caso general para la difusión de los gases A y B más convección:**

Hasta este punto solo se ha considerado la transferencia de masa por difusión en un fluido estacionario, sin un movimiento neto (o flujo convectivo) de la totalidad de la mezcla de *A* y *B*, en donde el flujo específico de difusión $J_A$ solo se debe al gradiente de concentraciones; el cual también se puede expresar en función de la velocidad de difusión de *A* como:

$$J_A = v_{dif,A} \cdot C_A \quad (40)$$

Donde:

$v_{dif,A}$: Velocidad de difusión de *A*, en m/s, considerando que lo hace hacia la derecha (con signo positivo)

Consideremos ahora que la totalidad del fluido se está moviendo con un flujo general o convectivo. El componente *A* sigue difundiéndose hacia la derecha, y su velocidad con respecto a un punto estacionario será igual a su velocidad de difusión más la velocidad de la fase total:

$$v_A = v_{dif,A} + v_M \quad (41)$$

Donde:

$v_A$: Velocidad de *A* con respecto a un punto estacionario.

$v_M$: Velocidad molar promedio de la totalidad del fluido con respecto a un punto estacionario.

Multiplicando la ecuación (41) por $C_A$, se tiene:

$$C_A \cdot v_A = C_A \cdot v_{dif,A} + C_A \cdot v_M \quad (42)$$

Podemos expresar esta ecuación por:

$$N_A = J_A + C_A \cdot v_M \quad (43)$$

Donde:

$N_A$ : Flujo específico total de *A* con respecto al punto estacionario

$J_A$ : Flujo específico de difusión con respecto al fluido en movimiento.

$C_A \cdot v_M$ : Flujo convectivo específico de *A* con respecto al punto estacionario.

Además, sea $N$ , el flujo específico total de la corriente general con respecto al punto estacionario:

$$N = C \cdot v_M = N_A + N_B \quad (44)$$

Despejando $v_M$ :

$$v_M = \frac{N_A + N_B}{C} \quad (45)$$

Reemplazando en la ecuación (43):

$$N_A = J_A + \frac{C_A}{C} \cdot (N_A + N_B) \quad (46)$$

Sustituyendo la ecuación (25) que es la ley de Fick en la ecuación (46)[5]:

$$N_A = -D_{AB} \cdot \frac{dC_A}{dz} + \frac{C_A}{C} \cdot (N_A + N_B) \quad (47)$$

Esta situación expresa de forma general la difusión más convección. Puede escribirse una ecuación similar para $N_B$ :

$$N_B = -D_{BA} \cdot \frac{dC_B}{dz} + \frac{C_B}{C} \cdot (N_A + N_B) \quad (48)$$

Ambas ecuaciones (47) y (48), se pueden aplicar para la difusión en gases, líquidos y sólidos.

**3. Difusión en estado estacionario de *A* que se difunde a través de *B* no difusivo y en reposo:**

En este caso, algún límite al final de la trayectoria de difusión es impermeable al componente *B*, por lo que este no puede atravesarlo. Para un mejor entendimiento veamos 2 ejemplos:

a) Considerar la evaporación de un líquido puro como el benceno (*A*) en el fondo de un tubo estrecho, por cuyo extremo superior se hace pasar una gran cantidad de aire

[5] Esta ecuación representa otra de las formas de la ley de Fick, en la cual se involucra los términos correspondientes al transporte molecular y al transporte convectivo.

(*B*) inerte o que no se difunde (ver figura adjunta). El vapor de benceno (*A*) se difunde a través del aire (*B*) en el tubo. El límite en la superficie líquida en el punto 1 es impermeable al aire, pues este es insoluble en el benceno líquido. Por consiguiente, el aire (*B*) no puede difundirse en la superficie o por debajo de ella. En el punto 2, la presión parcial $P_{A,2} = 0$, pues pasa un gran volumen de aire.

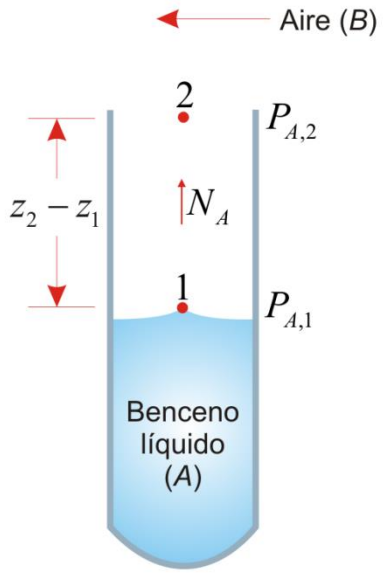



**Figura 6:** Difusión de Benceno a través del aire no difusivo y en reposo (benceno que se evapora al aire)

b) Otro ejemplo lo constituye la absorción de vapor de $NH_3$ (*A*) del aire (*B*) en agua. Debido a la baja solubilidad del aire en el agua, se puede considerar la superficie del agua como impermeable al aire.

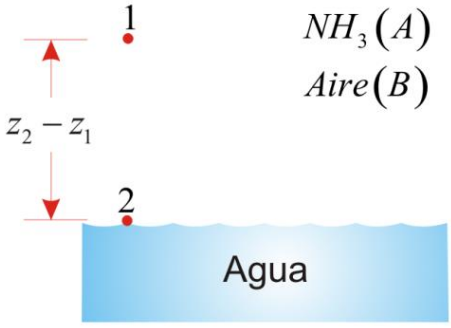



**Figura 7:** Difusión del agua a través del aire

Así tendremos para ambos ejemplos que $N_B = 0$, y reemplazando este valor en la ecuación (47) obtenemos:

$$N_A = -D_{AB} \cdot \frac{dC_A}{dz} + \frac{C_A}{C} \cdot N_A \quad (49)$$

Si se mantiene constante la presión, y si consideramos a los gases como ideales tenemos: $C = \frac{P}{R \cdot T}$ y $C_A = \frac{P_A}{R \cdot T}$; y reemplazando en la ecuación (49) tenemos:

$$N_A = -\frac{D_{AB}}{R \cdot T} \cdot \frac{dP_A}{dz} + \frac{P_A}{P} \cdot N_A \quad (50)$$

Reordenando e integrando:

$$N_A \cdot \left(1 - \frac{P_A}{P}\right) = -\frac{D_{AB}}{R \cdot T} \cdot \frac{dP_A}{dz} \quad (51)$$

$$N_A \cdot \int_{z_1}^{z_2} dz = -\frac{D_{AB}}{R \cdot T} \cdot \int_{P_{A,1}}^{P_{A,2}} \frac{dP_A}{1 - \frac{P_A}{P}}$$

$$N_A \cdot (z_2 - z_1) = \frac{D_{AB} \cdot P}{R \cdot T} \cdot \ln\left(\frac{P - P_{A,2}}{P - P_{A,1}}\right)$$

$$N_A = \frac{D_{AB} \cdot P}{R \cdot T \cdot (z_2 - z_1)} \cdot \ln\left(\frac{P - P_{A,2}}{P - P_{A,1}}\right) \quad (52)$$

Pero sabemos que $P = P_{A,1} + P_{B,1} = P_{A,2} + P_{B,2}$, de donde se tiene que $P - P_{A,2} = P_{B,2}$ y $P - P_{A,1} = P_{B,1}$. Reemplazando en la ecuación (52) y multiplicando por el factor $\frac{P_{A,1} - P_{A,2}}{P_{B,2} - P_{B,1}}$, que es igual a la unidad, tenemos:

$$N_A = \frac{D_{AB} \cdot P}{R \cdot T \cdot (z_2 - z_1)} \times \frac{P_{A,1} - P_{A,2}}{P_{B,2} - P_{B,1}} \cdot \ln\left(\frac{P_{B,2}}{P_{B,1}}\right) \quad (53)$$

Definiendo la mezcla logarítmica de *B* como:

$$P_{B,M} = \frac{P_{B,2} - P_{B,1}}{\ln\left(\frac{P_{B,2}}{P_{B,1}}\right)} \quad (54)$$

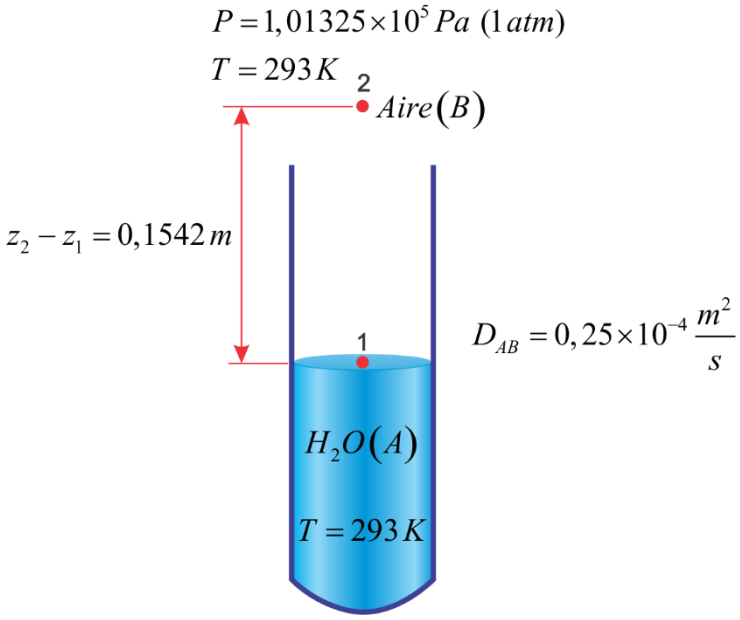
Reemplazando en la ecuación (53):

$$N_A = \frac{D_{AB} \cdot P \cdot \left(P_{A,1} - P_{A,2}\right)}{R \cdot T \cdot \left(z_2 - z_1\right).P_{B,M}} \quad (55)$$

Si $P_{A,1}$ es pequeño en comparación con $P$, es decir para una mezcla gaseosa diluida, se tiene: $P_{B,M} \cong P$.

**Problema 3:** El agua en el fondo de un tubo metálico estrecho se mantiene a temperatura constante de 293 K. La presión total del aire (que se supone seco) es $1{,}01325\times10^5$ Pa (1 atm) y la temperatura es 293 K. El agua se evapora y se difunde a través del aire en el tubo y la trayectoria de difusión $z_2$-$z_1$ tiene 0,1542 m de longitud. Calcule la velocidad de evaporación en estado estacionario en kmol/s.m$^2$. La difusividad del vapor de agua a 293 K y 1 atm de presión es $0{,}250\times10^{-4}$ m$^2$/s. Suponga que el sistema es isotérmico.

*Solución:*




De tablas, se encuentra la presión de vapor del agua a 293 K: $P_{A,1} = 0{,}0231\ atm$

La presión del agua en el punto 2, se considera cero por tratarse de aire puro:

$$P_{A,2} = 0\ atm$$

$$P_{B,1} = P - P_{A,1} = 1\ atm - 0{,}0231\ atm = 0{,}9769\ atm$$

$$P_{B,2} = P - P_{A,2} = 1\ atm - 0\ atm = 1\ atm$$

Reemplazando en la ecuación (54) para encontrar la media logarítmica de B:

$$P_{B,M} = \frac{P_{B,2} - P_{B,1}}{\ln\left(\frac{P_{B,2}}{P_{B,1}}\right)} = \frac{1\ atm - 0{,}9769\ atm}{\ln\left(\frac{1\ atm}{0{,}9769\ atm}\right)} = 0{,}9884\ atm$$

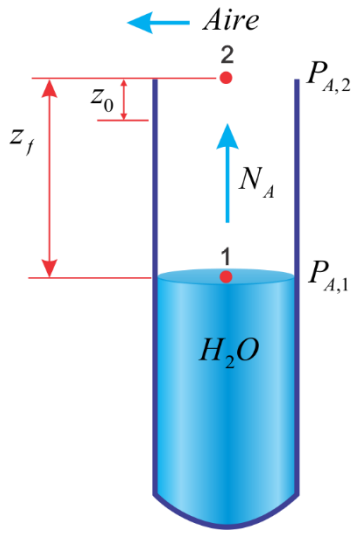
Reemplazando este valor en la ecuación (55):

$$N_A = \frac{D_{AB} \cdot P \cdot \left(P_{A,1} - P_{A,2}\right)}{R \cdot T \cdot (z_2 - z_1) \cdot P_{B,M}}$$

$$N_A = \frac{\left(0{,}25 \times 10^{-4}\ \frac{m^2}{s}\right) \cdot (1\ atm) \cdot (0{,}0231\ atm - 0)}{\left(0{,}082\ \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K}\right) \cdot (293\ K) \cdot (0{,}1542\ m) \cdot (0{,}9884\ atm) \times \frac{1\ m^3}{10^3\ L}}$$

$$N_A = 1{,}577 \times 10^{-4}\ \frac{mol}{m^2 \cdot s} \times \frac{1\ kmol}{10^3\ mol} = 1{,}577 \times 10^{-7}\ \frac{kmol}{m^2 \cdot s}$$

**Problema 4:** La difusión de vapor de agua en un tubo estrecho ocurre como se muestra en la figura. Sin embargo, en un tiempo dado *t*, el nivel es *z m* desde la parte superior. Conforme avanza la difusión, el nivel, el nivel va disminuyendo lentamente. Deduzca la ecuación para el tiempo $t_f$ que tarda el nivel en bajar desde un punto de partida $z_0$ *m* en $t=0$ a $z_f$ en $t=t_f$ s, como se muestra.




*Solución:*

Conforme pasa el tiempo, la longitud de la trayectoria *z* aumenta.

Aplicando la ecuación (55), considerando que $N_A$ y *z* son variables.

$$N_A = \frac{D_{AB} \cdot P \cdot \left(P_{A,1} - P_{A,2}\right)}{R \cdot T \cdot z \cdot P_{B,M}}$$

Si se supone un área de corte transversal de *1* $m^2$, el nivel desciende *dz m* en *dt s* y $\frac{\rho_A \cdot (dz \cdot 1)}{M_A}$ son los kmol de A que se van a ir difundiendo.

$$N_A \cdot (1) = \frac{\rho_A \cdot (dz \cdot 1)}{M_A \cdot dt}$$

Igualando ambas ecuaciones, ordenando e integrando se tiene:

$$\frac{D_{AB} \cdot P \cdot \left(P_{A,1} - P_{A,2}\right)}{R \cdot T \cdot P_{B,M}} \int_{t=0}^{t_f} dt = \frac{\rho_A}{M_A} \int_{z_0}^{z_f} z \cdot dz$$

$$t = \frac{\rho_A \cdot \left(z_f^2 - z_0^2\right) \cdot R \cdot T \cdot P_{B,M}}{2 \cdot M_A \cdot D_{AB} \cdot P \cdot \left(P_{A,1} - P_{A,2}\right)}$$

**4. Difusión a través de un área de corte transversal variable:**

Cuando el área de corte transversal es variable, se define la siguiente ecuación:

$$N_A = \frac{\bar{N}_A}{A} \quad (56)$$

Donde:

$\bar{N}_A$: son los kilomoles de *A* que se difunde por segundo.

Casos:

a) **Difusión desde una esfera:**

Considerar el caso de difusión en un gas hacia o desde una esfera; situación que se puede presentar en casos de evaporación de una gota de líquido, la evaporación de una bola de naftaleno y en la difusión de nutrientes a un microorganismo de forma esférica en un líquido.

Así tenemos una esfera de radio $r_1$ que se encuentra en un medio gaseoso infinito. El componente *A*, con una presión parcial $P_{A,1}$ en la superficie, se difunde en el medio estacionario circundante *B*, en donde el valor de $P_{A,2}$ a una distancia grande es igual a cero.

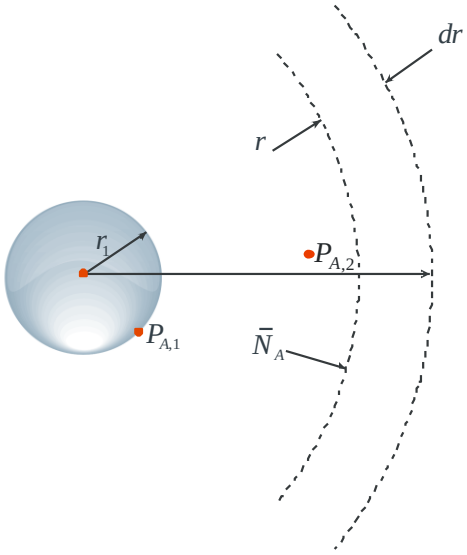



**Figura 8:** Difusión desde una esfera

De la ecuación (56) para una esfera, se tiene:

$$N_A = \frac{\bar{N}_A}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \quad (57)$$

Y de la ecuación (51), reemplazando $dz$ por $dr$:

$$N_A = \frac{-D_{AB}}{R \cdot T} \cdot \frac{dP_A}{\left(1 - \frac{P_A}{P}\right) \cdot dr} \quad (58)$$

Igualando ambas ecuaciones, ordenando e integrando:

$$\frac{\bar{N}_A}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = \frac{-D_{AB}}{R \cdot T} \cdot \frac{dP_A}{\left(1 - \frac{P_A}{P}\right) \cdot dr}$$

$$\frac{\bar{N}_A}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{-D_{AB}}{R \cdot T} \cdot \int_{P_{A,1}}^{P_{A,2}} \frac{dP_A}{1 - \frac{P_A}{P}}$$

$$\frac{\bar{N}_A}{4 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] = \frac{D_{AB} \cdot P}{R \cdot T} \cdot \ln\left(\frac{P - P_{A,2}}{P - P_{A,1}}\right)$$

Puesto que $r_2 \gg r_1$, por lo que $\frac{1}{r_2} \cong 0$, sustituyendo el valor de $P_{B,M}$ de la ecuación (54) y multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{r_1}$:

$$\frac{1}{r_1}\times\frac{\bar{N}_A}{4\cdot\pi\cdot r_1}=\frac{D_{AB}\cdot P\cdot\left(P_{A,1}-P_{A,2}\right)}{R\cdot T\cdot P_{B,M}}\times\frac{1}{r_1}$$

$$\frac{\bar{N}_A}{4\cdot\pi\cdot r_1^2}=N_{A,1}=\frac{D_{AB}\cdot P\cdot\left(P_{A,1}-P_{A,2}\right)}{R\cdot T\cdot r_1\cdot P_{B,M}} \quad (59)$$

b) **Difusión por un conducto de área de corte transversal no uniforme:**

Considerar la figura siguiente en donde el componente *A* se difunde en estado estacionario a través de un conducto circular de área variable.

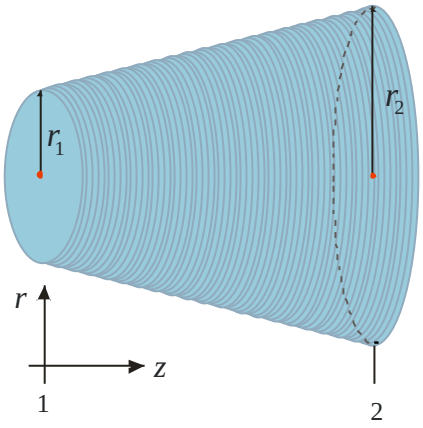



**Figura 9:** Difusión por un conducto de área transversal no uniforme

De la ecuación (56):

$$N_A=\frac{\bar{N}_A}{\pi\cdot r^2} \quad (60)$$

De la ecuación (51), tenemos:

$$N_A=\frac{-D_{AB}}{R\cdot T}\cdot\frac{dP_A}{\left(1-\frac{P_A}{P}\right)\cdot dz} \quad (61)$$

Igualando ambas ecuaciones:

$$\frac{\bar{N}_A}{\pi\cdot r^2}=\frac{-D_{AB}}{R\cdot T}\cdot\frac{dP_A}{\left(1-\frac{P_A}{P}\right)\cdot dz} \quad (62)$$

En donde el radio *r* es variable y se puede relacionar con la posición *z* de la trayectoria por medio de la ecuación de una recta que pasa por los puntos 1 ($z_1$,$r_1$) y 2 ($z_2$,$r_2$):

$$\frac{r-r_1}{z-z_1}=\frac{r_2-r_1}{z_2-z_1} \quad (63)$$

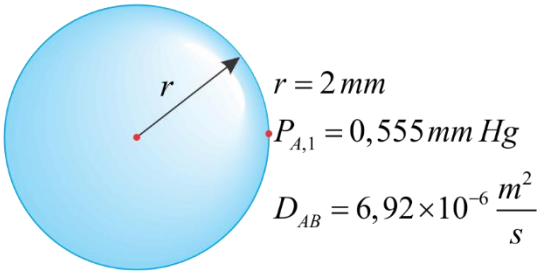
$$r=\left(\frac{r_2-r_1}{z_2-z_1}\right)\cdot\left(z-z_1\right)+r_1 \quad (64)$$

Sustituyendo la ecuación (63) en la ecuación (61), ordenando e integrando tenemos:

$$\frac{\bar{N}_A}{\pi}\cdot\left(\frac{z_2-z_1}{r_1\cdot r_2}\right)=\frac{D_{AB}\cdot P}{R\cdot T}\cdot\ln\left(\frac{P-P_{A,2}}{P-P_{A,1}}\right) \quad (65)$$

**Problema 5:** Una esfera de naftaleno con radio de 2 mm está suspendida en un gran volumen de aire estacionario a *318 K* y *1,01325×10$^5$ Pa* (*1 atm*). Se puede suponer que la temperatura superficial del naftaleno es 318 K y su presión de vapor a esta temperatura es 0,555 mm de Hg. El valor de $D_{AB}$ del naftaleno en aire a 318 K es 6,92×*10*$^{-6}$ m$^2$/s. Calcule la rapidez de evaporación del naftaleno en la superficie.

$$Aire\begin{cases} T=318\,K \\ P=1,01325\times10^5\ Pa=1\,atm \end{cases}$$




*Solución:*

$$P_{B,1}=P-P_{A,1}=1\ atm-0{,}555\ mm\ Hg\times\frac{1\ atm}{760\ mm\ Hg}=0{,}999\ atm$$

$$P_{B,2}=P-P_{A,2}=1\ atm-0\ atm=1\ atm$$

Reemplazando en la ecuación (54) para encontrar la media logarítmica de B:

$$P_{B,M}=\frac{P_{B,2}-P_{B,1}}{\ln\left(\frac{P_{B,2}}{P_{B,1}}\right)}=\frac{1\ atm-0{,}999\ atm}{\ln\left(\frac{1\ atm}{0{,}999\ atm}\right)}=0{,}999\ atm$$

Reemplazando en la ecuación (59):

$$N_{A,1}=\frac{D_{AB}\cdot P\cdot\left(P_{A,1}-P_{A,2}\right)}{R\cdot T\cdot r_1\cdot P_{B,M}}$$

$$N_{A,1} = \frac{\left(6{,}92 \times 10^{-6}\ \frac{m^2}{s}\right) \cdot (1\ atm) \cdot (0{,}555 mm\ Hg - 0) \times \frac{1\ atm}{760\ mm\ Hg}}{\left(0{,}082\ \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K}\right) \cdot (318\ K) \cdot (2 \times 10^{-3}\ m) \cdot (0{,}999\ atm) \times \frac{1\ m^3}{10^3\ L}}$$

$$N_{A,1} = 9{,}70 \times 10^{-5}\ \frac{mol}{m^2 \cdot s}$$

# IV. DIFUSIÓN MOLECULAR EN LÍQUIDOS

La difusión de solutos en líquidos es importante en los procesos industriales, sobre todo en las operaciones como la extracción líquido-líquido o extracción con disolventes, en la absorción de gases y en la destilación.

## 1. Ecuaciones para la difusión en líquidos:

En un líquido sus moléculas están más próximas unas de otras que en los gases, y debido a esto, las fuerzas de atracción entre ellas tienen un efecto importante sobre la difusión.

**a) Contradifusión equimolar:** De la ecuación (47) y considerando contradifusión equimolar en estado estacionario, donde: $N_A = -N_B$

$$N_A = -D_{AB} \cdot \frac{dC_A}{dz} + \frac{C_A}{C} \cdot \left( \cancel{N_A - N_A} \right)$$

$$N_A \cdot \int_{z_1}^{z_2} dz = -D_{AB} \cdot \int_{C_{A,1}}^{C_{A,2}} dC_A$$

$$N_A = \frac{D_{AB} \cdot \left( C_{A,1} - C_{A,2} \right)}{z_2 - z_1} \quad (66)$$

Lo cual puede ser escrita como:

$$N_A = \frac{D_{AB} \cdot C \cdot \left( y_{A,1} - y_{A,2} \right)}{z_2 - z_1} \quad (67)$$

Donde:

$C$: es la concentración total promedio de $A + B$

Además:

$$C = \frac{\rho}{MM} = \frac{\frac{\rho_1}{MM_1} + \frac{\rho_2}{MM_2}}{2} \quad (68)$$

Donde:

$\rho_1$ y $\rho_2$: Densidades de la solución en los puntos 1 y 2 respectivamente.

$MM_1$ y $MM_2$ : Masas moleculares de la solución en los puntos 1 y 2 respectivamente.

**b) Difusión de *A* a través de *B* que no se difunde:** Estos casos son frecuentes en la industria. Supongamos que el soluto *A* que se difunde a través del líquido *B* que no se difunde ( $N_B = 0$ ), se comporta como un gas ideal:

$$P_{A,1} = C_{A,1} \cdot R \cdot T \quad (69)$$

$$P_{A,2} = C_{A,2} \cdot R \cdot T \quad (70)$$

Además:

$$P = C \cdot R \cdot T \quad (71)$$

Reemplazando en la ecuación (52):

$$N_A = \frac{D_{AB} \cdot C}{z_2 - z_1} \cdot \ln\left[\frac{C \cdot R \cdot T - C_{A,2} \cdot R \cdot T}{C \cdot R \cdot T - C_{A,1} \cdot R \cdot T}\right]$$

$$N_A = \frac{D_{AB} \cdot C}{z_2 - z_1} \cdot \ln\left[\frac{\dfrac{C \cdot R \cdot T - C_{A,2} \cdot R \cdot T}{C \cdot R \cdot T}}{\dfrac{C \cdot R \cdot T - C_{A,1} \cdot R \cdot T}{C \cdot R \cdot T}}\right]$$

$$N_A = \frac{D_{AB} \cdot C}{z_2 - z_1} \cdot \ln\left[\frac{1 - \dfrac{C_{A,2}}{C}}{1 - \dfrac{C_{A,1}}{C}}\right]$$

$$N_A = \frac{D_{AB} \cdot C}{z_2 - z_1} \cdot \ln\left[\frac{1 - y_{A,2}}{1 - y_{A,1}}\right] \quad (72)$$

Además, se tiene la siguiente relación:

$$y_{A,1} + y_{B,1} = y_{A,2} + y_{B,2} = 1 \quad (73)$$

Reemplazando en la ecuación (72) y multiplicando por: $\dfrac{y_{A,1} - y_{A,2}}{y_{B,2} - y_{B,1}}$ :

$$N_A = \frac{D_{AB} \cdot C}{z_2 - z_1} \cdot \ln\left[\frac{y_{B,2}}{y_{B,1}}\right] \times \frac{y_{A,1} - y_{A,2}}{y_{B,2} - y_{B,1}} \quad (74)$$

Definiendo la siguiente relación:

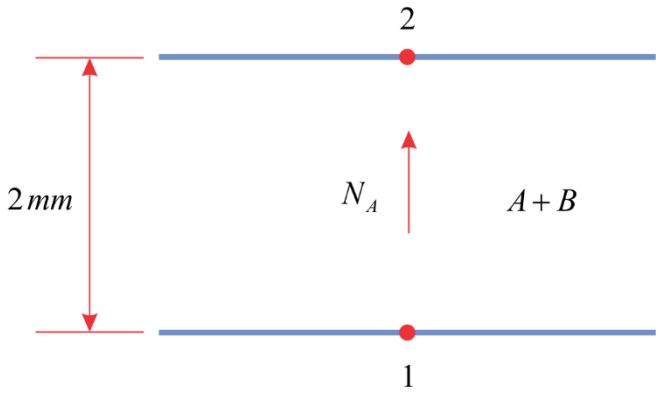
$$y_{B,M} = \frac{y_{B,2} - y_{B,1}}{\ln\left[\frac{y_{B,2}}{y_{B,1}}\right]} \quad (75)$$

Reemplazando en la ecuación (74):

$$N_A = \frac{D_{AB} \cdot C \cdot \left(y_{A,1} - y_{A,2}\right)}{\left(z_2 - z_1\right) \cdot y_{B,M}} \quad (76)$$

**Problema 1:** Una solución de etanol (A) en agua (B) en forma de película estacionaria de 2,0 mm de espesor a 293 K, está en contacto con la superficie de un disolvente orgánico en el cual el etanol es soluble, pero el agua no. Por tanto, $N_B=0$. En el punto 1, la concentración del etanol es 16,8% en masa y la solución tiene una densidad $\rho_1=972{,}8\ kg/m^3$. En el punto 2 la concentración del etanol es 6,8% en masa y $\rho_2=988{,}1\ kg/m^3$. La difusividad del etanol es $0{,}740\times10^{-9}\ m^2/s$. calcule el flujo de estado estacionario $N_A$.

Las masas moleculares de A y B son: $MM_A=46{,}05\ kg/kmol$ y $MM_B=18{,}02\ kg/kmol$.




Solución:

Se utilizará la ecuación (76). Calculando las fracciones molares para 1 kg de solución:

$$y_{A,1} = \frac{\frac{0{,}168\ kg}{46{,}05\ \frac{kg}{kmol}}}{\frac{0{,}168\ kg}{46{,}05\ \frac{kg}{kmol}} + \frac{0{,}832\ kg}{18{,}02\ \frac{kg}{kmol}}} = 0{,}0732$$

$$y_{A,2} = \frac{\frac{0{,}068\ kg}{46{,}05\ \frac{kg}{kmol}}}{\frac{0{,}068\ kg}{46{,}05\ \frac{kg}{kmol}} + \frac{0{,}932\ kg}{18{,}02\ \frac{kg}{kmol}}} = 0{,}0278$$

De donde:

$$y_{B,1} = 1 - 0{,}0732 = 0{,}9268$$

$$y_{B,2} = 1 - 0{,}0278 = 0{,}9722$$

Para calcular $y_{B,M}$, se debe reemplazar en la ecuación (75):

$$y_{B,M} = \frac{0{,}9722 - 0{,}9268}{\ln\left(\frac{0{,}9722}{0{,}9268}\right)} = 0{,}9493$$

Calculando las masas moleculares en 1 y 2:

$$MM_1 = \frac{1\ kg}{\frac{0{,}168\ kg}{46{,}05\ \frac{kg}{kmol}} + \frac{0{,}832\ kg}{18{,}02\ \frac{kg}{kmol}}} = 20{,}07\ \frac{kg}{kmol}$$

$$MM_2 = \frac{1\ kg}{\frac{0{,}068\ kg}{46{,}05\ \frac{kg}{kmol}} + \frac{0{,}932\ kg}{18{,}02\ \frac{kg}{kmol}}} = 18{,}80\ \frac{kg}{kmol}$$

Reemplazando en la ecuación (68):

$$C = \frac{\frac{\rho_1}{MM_1} + \frac{\rho_2}{MM_2}}{2} = \frac{\frac{972{,}8\ \frac{kg}{m^3}}{20{,}07\ \frac{kg}{kmol}} + \frac{988{,}1\ \frac{kg}{m^3}}{18{,}80\ \frac{kg}{kmol}}}{2} = 50{,}51\ \frac{kmol}{m^3}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (76):

$$N_A = \frac{D_{AB} \cdot C \cdot \left(y_{A,1} - y_{A,2}\right)}{(z_2 - z_1).\, y_{B,M}}$$

$$N_A = \frac{\left(0{,}740 \times 10^{-9}\,\frac{m^2}{s}\right)\left(50{,}51\ \frac{kmol}{m^3}\right)(0{,}0732 - 0{,}0278)}{(2 \times 10^{-3}\ m)(0{,}9493)}$$

$$N_A = 8{,}936 \times 10^{-7}\ \frac{kmol}{m^2 \cdot s}$$

# V. DIFUSIÓN MOLECULAR EN SÓLIDOS

La transferencia de masa en los sólidos es muy importante en los procesos químicos y biológicos, a pesar de que su velocidad de difusión es menor comparada con los líquidos y gases.

En los sólidos se dan dos tipos de difusión: aquella que sigue la ley de Fick y que no depende de la estructura del sólido; y la difusión en sólidos porosos, en la que la estructura y los canales vacíos son de gran importancia.

## 1. Difusión de sólidos que siguen la ley de Fick:

La difusión en sólidos se verifica cuando un fluido o soluto que se difunde, se disuelve en el sólido para formar una solución más o menos homogénea.

Partiendo de la ecuación (47):

$$N_A = -D_{AB} \cdot \frac{dC_A}{dz} + \frac{C_A}{C} \cdot \left(N_A + N_B\right) \quad (47)$$

Puesto que: $\frac{C_A}{C} = x_A$ es un valor muy bajo, siempre se desprecia; por lo que la ecuación (47) se simplifica a:

$$N_A = -D_{AB} \cdot \frac{dC_A}{dz} \quad (77)$$

Integrando para una placa sólida:

$$N_A \cdot \int_{z_1}^{z_2} dz = -D_{AB} \cdot \int_{C_{A,1}}^{C_{A,2}} dC_A$$

$$N_A \cdot \left(z_2 - z_1\right) = -D_{AB} \cdot \left(C_{A,2} - C_{A,1}\right)$$

$$N_A = \frac{D_{AB} \cdot \left(C_{A,1} - C_{A,2}\right)}{z_2 - z_1} \quad (78)$$

En el caso de una difusión radial a través de la pared de un cilindro de radio interno $r_1$ y radio externo $r_2$ con longitud $L$.

$$N_A = -D_{AB} \cdot \frac{dC_A}{dr} \quad (79)$$

De la ecuación (56):

$$N_A = \frac{\bar{N}_A}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot L} \quad (80)$$

Igualando ambas ecuaciones, ordenando e integrando:

$$\frac{\bar{N}_A}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot L} = -D_{AB} \cdot \frac{dC_A}{dr}$$

$$\frac{\bar{N}_A}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -D_{AB} \cdot \int_{C_{A,1}}^{C_{A,2}} dC_A$$

$$\frac{\bar{N}_A}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = -D_{AB} \cdot \left(C_{A,2} - C_{A,1}\right)$$

$$\bar{N}_A = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot D_{AB} \cdot \left(C_{A,1} - C_{A,2}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \quad (81)$$

Para la difusión radial a través de una capa esférica de radios internos y externo $r_1$ y $r_2$ respectivamente. De la ecuación (56):

$$N_A = \frac{\bar{N}_A}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \quad (82)$$

Igualando con la ecuación (79), ordenando e integrando:

$$\frac{\bar{N}_A}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = -D_{AB} \cdot \frac{dC_A}{dr}$$

$$\frac{\bar{N}_A}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = -D_{AB} \cdot \int_{C_{A,1}}^{C_{A,2}} dC_A$$

$$-\frac{\bar{N}_A}{4 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right] = -D_{AB} \cdot \left(C_{A,2} - C_{A,1}\right)$$

$$\bar{N}_A = \frac{4 \cdot \pi \cdot D_{AB} \cdot \left(C_{A,1} - C_{A,2}\right)}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \quad (83)$$

El coeficiente de difusión $D_{AB}$ en el sólido no depende de la presión del gas o del líquido en la superficie del sólido.

Además, la concentración de un gas *A* en un sólido está dada por:

$$C_A = S \cdot P_A \quad (84)$$

Donde:

$S$: Solubilidad del gas *A* en el sólido

$P_A$: Presión parcial de *A*.

En muchos casos, los datos experimentales de difusión de gases en sólidos no se dan como difusividades y solubilidades, sino como permeabilidad:

$$P_M = D_{AB} \cdot S \quad (85)$$

Donde:

$P_M$ : Permeabilidad.

$S$: Solubilidad del gas *A* en el sólido.

De la ecuación (84):

$$C_{A,1} = S \cdot P_{A,1} \quad (86)$$

$$C_{A,2} = S \cdot P_{A,2} \quad (87)$$

Sustituyendo en la ecuación (78):

$$N_A = \frac{D_{AB} \cdot S \cdot \left(P_{A,1} - P_{A,2}\right)}{z_2 - z_1} \quad (88)$$

$$N_A = \frac{P_M \cdot \left(P_{A,1} - P_{A,2}\right)}{z_2 - z_1} \quad (89)$$

**2. Difusión en sólidos porosos en los que afecta la estructura:**

**a) Difusión de líquidos en sólidos porosos:**

Considerando la figura siguiente, en donde, si los espacios vacíos están llenos de líquido, la concentración del soluto en el punto 1 es $C_{A,1}$ y en el punto 2 es $C_{A,2}$. La trayectoria recorrida por el soluto al difundirse en el líquido a través de los espacios vacíos, es mayor que $z_2 - z_1$ por un factor $\tau$, llamado sinuosidad.

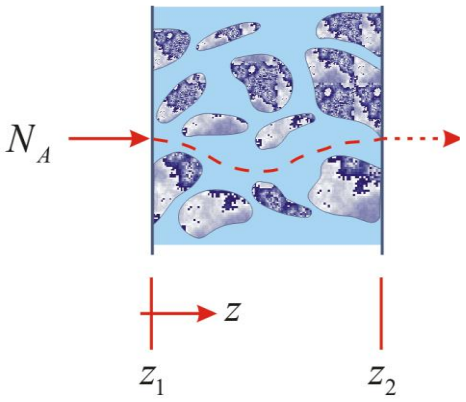



**Figura 10:** Corte transversal de un sólido poroso

De la ecuación (78), se tiene:

$$N_A = \frac{\varepsilon \cdot D_{AB} \cdot \left(C_{A,1} - C_{A,2}\right)}{\tau \cdot \left(z_2 - z_1\right)} \quad (90)$$

Donde:

$\varepsilon$: Fracción de espacios vacíos.

$\tau$: Factor de corrección[6] de la trayectoria más larga que $z_2 - z_1$.

**b) Difusión de gases en sólidos porosos:**

Si en la figura anterior, en lugar de llenarse con líquido, los poros se llenasen con gas, la ecuación (90) se transforma en:

$$N_A = \frac{\varepsilon \cdot D_{AB} \cdot \left(P_{A,1} - P_{A,2}\right)}{\tau \cdot R \cdot T \cdot \left(z_2 - z_1\right)} \quad (91)$$

[6] En sólidos de tipo inerte $\tau$ varía desde 1,5 hasta 5.

# VI. COEFICIENTES DE TRANSFERENCIA DE MASA

## 1. Introducción:

Cuando un fluido fluye por una superficie sólida, la región contigua a la superficie presenta un flujo predominantemente laminar, el cual al aumentar la distancia de la superficie, irá cambiando gradualmente hasta ser cada vez más turbulento; y en las zonas más externas del fluido prevalecerá un flujo completamente turbulento.

De la ecuación (47), ordenando e integrando:

$$N_A = -D_{AB} \cdot \frac{dC_A}{dz} - \frac{C_A}{C} \cdot \left(N_A + N_B\right) \quad (47)$$

$$\frac{N_A}{N_A + N_B} = -\frac{D_{AB}}{N_A + N_B} \cdot \frac{dC_A}{dz} + \frac{C_A}{C} \quad (92)$$

$$\frac{N_A + N_B}{-D_{AB}} \cdot \int_{z_1}^{z_2} dz = \int_{C_{A,1}}^{C_{A,2}} \frac{dC_A}{\frac{N_A}{N_A + N_B} - \frac{C_A}{C}}$$

$$\frac{N_A + N_B}{-D_{AB}} \cdot \left(z_2 - z_1\right) = -C \cdot \ln\left[\frac{\frac{N_A}{N_A + N_B} - \frac{C_{A,2}}{C}}{\frac{N_A}{N_A + N_B} - \frac{C_{A,1}}{C}}\right]$$

$$N_A + N_B = \frac{D_{AB} \cdot C}{z_2 - z_1} \cdot \ln\left[\frac{\frac{N_A}{N_A + N_B} - \frac{C_{A,2}}{C}}{\frac{N_A}{N_A + N_B} - \frac{C_{A,1}}{C}}\right] \quad (93)$$

La cual se puede escribir como:

$$N_A = \frac{N_A}{N_A + N_B} \cdot \frac{D_{AB} \cdot C}{z_2 - z_1} \cdot \ln\left[\frac{\frac{N_A}{N_A + N_B} - \frac{C_{A,2}}{C}}{\frac{N_A}{N_A + N_B} - \frac{C_{A,1}}{C}}\right] \quad (94)$$

En donde: $\frac{D_{AB} \cdot C}{z_2 - z_1}$, se puede reemplazar por $F$ que es un coeficiente de masa.

$$N_A = \frac{N_A}{N_A + N_B} \cdot F \cdot \ln\left[\frac{\frac{N_A}{N_A + N_B} - \frac{C_{A,2}}{C}}{\frac{N_A}{N_A + N_B} - \frac{C_{A,1}}{C}}\right] \quad (95)$$

Donde:

$F$ : Coeficiente de transferencia de masa[7].

Existen coeficientes de transferencia de masa especiales, que se definen como:

$$N = \text{Coeficiente} \cdot \left[\text{Diferencia de concentración}\right]$$

**a) Contratransferencia equimolar:**

Se tiene: $N_A = -N_B$ por lo que: $\frac{N_A}{N_A + N_B} = \infty$.

**Para gases:**

$$N_A = k_G \cdot \left(P_{A,1} - P_{A,2}\right) \quad (96)$$
$$N_A = k_y \cdot \left(y_{A,1} - y_{A,2}\right) \quad (97)$$
$$N_A = k_C \cdot \left(C_{A,1} - C_{A,2}\right) \quad (98)$$

**Para líquidos:**

$$N_A = k_x \cdot \left(x_{A,1} - x_{A,2}\right) \quad (99)$$
$$N_A = k_L \cdot \left(C_{A,1} - C_{A,2}\right) \quad (100)$$

**b) Transferencia de A a través de B que no se transfiere:**

Se tiene: $N_B = 0$ por lo que: $\frac{N_A}{N_A + N_B} = 1$.

**Para gases:**

$$N_A = k'_G \cdot \left(P_{A,1} - P_{A,2}\right) \quad (101)$$
$$N_A = k'_y \cdot \left(y_{A,1} - y_{A,2}\right) \quad (102)$$
$$N_A = k'_C \cdot \left(C_{A,1} - C_{A,2}\right) \quad (103)$$

[7] Este es un coeficiente de transferencia de masa local, definido para un lugar particular sobre la superficie límite de la fase. Esto es porque el valor *F* depende de la naturaleza del movimiento del fluido que puede variar a lo largo de la superficie.

**Para líquidos:**

$$N_A = k'_x \cdot \left(x_{A,1} - x_{A,2}\right) \quad (104)$$

$$N_A = k'_L \cdot \left(C_{A,1} - C_{A,2}\right) \quad (105)$$

## 2. Coeficientes de Transferencia de masa en flujo laminar:

Considerar la figura siguiente, en la que se muestra una película líquida en flujo laminar, que desciende en una superficie lisa vertical mientras es expuesta a un gas $A$, que se disuelve en el líquido. El líquido contiene una concentración uniforme $C_{A,0}$, en la parte superior. En la superficie del líquido, la concentración del gas disuelto es $C_{A,i}$, en equilibrio con la presión $A$ en la fase gaseosa. Para que el gas se disuelva en el líquido debe darse: $C_{A,i} > C_{A,0}$.

Suponer que el líquido en su descenso recorre la distancia $L$.

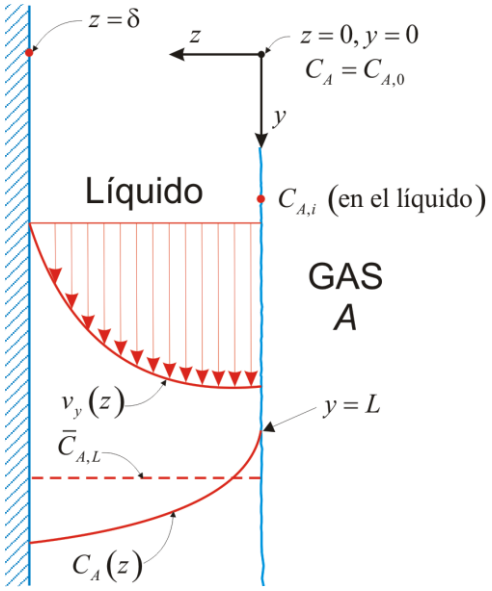



**Figura 11:** Película descendente de líquido

El espesor de la película ($\delta$) es:

$$\delta = \left(\frac{3 \cdot \bar{v}_y \cdot \mu}{\rho \cdot g}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3 \cdot \mu \cdot \Gamma}{\rho^2 \cdot g}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (106)$$

Donde:

$\delta$: Espesor de la película.

$\bar{v}_y$: Velocidad promedio en la dirección y.

$\mu$ : Viscosidad dinámica.

$\rho$ : Densidad de la solución.

$\Gamma$ : Rapidez del flujo de masa por unidad de espesor de la película.

$$\Gamma = \bar{v}_y \cdot \rho \cdot \delta \quad (107)$$

Se puede definir un coeficiente promedio ( $k_{L,\,prom}$ ) para la superficie líquido-gas completa:

$$k_{L,\,prom} = \frac{\bar{v}_y \cdot \delta}{L} \cdot \ln\left[\frac{C_{A,i} - C_{A,0}}{C_{A,i} - \bar{C}_{A,L}}\right] \quad (108)$$

Donde:

$C_{A,i}$ : Concentración de *A* en la superficie del líquido.

$C_{A,0}$ : Concentración de *A* en la parte superior del líquido.

$\bar{C}_{A,L}$ : Concentración de *A* promedio total.

$L$ : Distancia recorrida por el líquido en su descenso.

Definiendo el número de Reynolds para películas:

$$Re = \frac{4 \cdot \Gamma}{\mu} \quad (109)$$

Para rapideces bajas de flujo o largos tiempos de contacto del líquido con el gas (generalmente para $N_{\mathrm{Re}} < 100$ ), se tiene:

$$\frac{k_{L,\,prom} \cdot \delta}{D_{AB}} = Sh_{prom} \approx 3,41 \quad (110)$$

Donde:

$Sh$ : Número de Sherwood.

Asimismo, para números de Reynolds grandes o tiempo de contacto pequeño, da:

$$k_{L,\,prom} = \left(\frac{6 \cdot D_{AB}}{\pi \cdot \rho \cdot \delta \cdot L}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (111)$$

$$Sh_{prom} = \left( \frac{3 \cdot \delta}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot Re \cdot Sc \right)^{\frac{1}{2}} \quad (112)$$

Donde:

$Sc$ : Número de Schmidt[8].

$Re \cdot Sc$ : A este producto se le conoce como número de Peclet (Pe).

Estas $k_L$ promedio pueden utilizarse para calcular la rapidez de absorción total. Por lo tanto el flujo específico total de *A* promedio para la superficie completa gas- líquido es:

$$N_{A,prom} = \frac{\bar{v}_y \cdot \delta}{L} \cdot \left( C_{A,L} - C_{A,0} \right) = k_{L,prom} \cdot \left( C_{A,i} - \bar{C}_A \right)_M \quad (113)$$

Donde: $\left( C_{A,i} - \bar{C}_A \right)_M$ es el promedio logarítmico de la diferencia entre la parte superior e inferior de la película.

$$\left( C_{A,i} - \bar{C}_A \right)_M = \frac{\left( C_{A,i} - C_{A,0} \right) - \left( C_{A,i} - \bar{C}_{A,L} \right)}{\ln \left[ \frac{\left( C_{A,i} - C_{A,0} \right)}{C_{A,i} - \bar{C}_{A,L}} \right]} \quad (114)$$

**3. Coeficientes de transferencia de masa en flujo turbulento:**

En la práctica la mayor parte de situaciones implican el flujo turbulento[9] y debido a la imposibilidad de describir matemáticamente las condiciones de flujo, no es posible calcular los coeficientes de transferencia de masa, por lo que se hace uso de datos experimentales, los cuales son limitados en su extensión según las condiciones y situaciones en que se aplican, así como del rango de las propiedades del fluido.

[8] El número de Schmidt se define como:

$$Sc = \frac{\mu}{\rho \cdot D_{AB}}$$

[9] Es necesario recordar que la turbulencia se caracteriza por un movimiento irregular de las partículas del fluido con respecto al tiempo y al sentido.

Sin embargo hay muchas teorías que intentan interpretar o explicar el comportamiento de los coeficientes de masa, tales como: la teoría de la película, la de penetración, la de renovación de la superficie, de las capas límites, etc.

**a) Teoría de la película:**

Es la teoría más antigua y fue tomada de un concepto similar utilizado para la transferencia de calor por convección.

La teoría de la película nos dice que cuando un fluido en régimen turbulento fluye en contacto con una superficie sólida, en el momento en que se efectúa la transferencia de masa de la superficie hacia el fluido, la relación entre concentración y la distancia esta dada por la figura que se muestra a continuación. En donde la diferencia de concentración total: $C_{A,1} - C_{A,2}$ se atribuye a la difusión molecular dentro de una película "efectiva" de espesor $z_F$ .

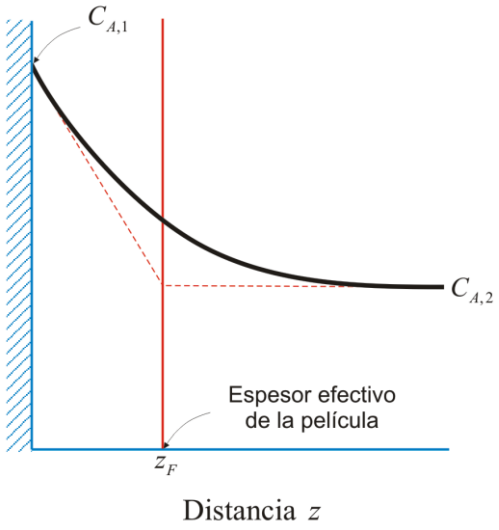



**Figura 12:** Teoría de la película

Es así que, según esta teoría, en las ecuaciones vistas hasta este punto, se puede reemplazar $z_2 - z_1$ por $z_F$ , es decir por el espesor efectivo de la película.

**b) Teoría de la penetración:**

Según Higbie, debido a que el tiempo de exposición de un fluido a la transferencia de masa es pequeño, no se llega a formar el gradiente de concentración característico del estado estacionario. Por lo que se puede utilizar la ecuación (28).

$$\frac{\partial C_A}{\partial t} = D_{AB} \cdot \frac{\partial^2 C_A}{\partial^2 z} \quad (28)$$

En donde se puede utilizar las siguientes condiciones:

$$C_A \quad = \quad \begin{cases} C_{A,0}, & \text{en } t = 0 \quad \text{para todo } z \\ C_{A,i}, & \text{en } z = 0 \quad \text{para } t > 0 \\ C_{A,0}, & \text{en } z = \infty \quad \text{para todo } t \end{cases}$$

Donde:

$t$ : Tiempo de contacto.

$C_{A,0}$ : Concentración inicial del gas disuelto.

$C_{A,i}$ : Concentración en la interfase gas-líquido.

Resolviendo la ecuación (28) se obtiene un flujo específico de transferencia de masa promedio durante el tiempo de exposición:

$$N_{A,\,prom} = 2 \cdot \left( C_{A,i} - C_{A,0} \right) \cdot \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi \cdot t}} \quad (115)$$

Y comprobando esta última ecuación con la ecuación (105), se tiene:

$$k'_{L,\,prom} = 2 \cdot \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi \cdot t}} \quad (116)$$

**c) Teoría de renovación de la superficie:**

Danckwerts señala, contrariamente a lo que consideraba Higbie, que los remolinos en la superficie de un fluido en régimen turbulento están expuestos a diferentes intervalos de tiempo. Por lo que la rapidez de transferencia de masa promedio por unidad de área superficial se determina sumando los valores individuales.

Además, la posibilidad de que un elemento de la superficie fuera reemplazado por otro casi no dependía del tiempo que hubiese permanecido en la superficie.

$$N_{A,\,prom} = \left( C_{A,i} - C_{A,0} \right) \cdot \sqrt{D_{AB} \cdot s} \quad (117)$$

Por lo tanto, comparándola con la ecuación (105), se tiene:

$$k'_{L,\,prom} = \sqrt{D_{AB} \cdot s} \quad (118)$$

Donde:

$s$: Velocidad fraccionaria de reemplazo de los elementos de la superficie.

**d) Teoría combinada de renovación de la superficie de la película:**

Dobbins combinó la teoría de la película y la de la renovación de la superficie. Para esto supuso que los elementos superficiales o remolinos tienen una profundidad finita. Modificó la tercera condición de frontera de la ecuación (28) por $C_A = C_{A,0}$ para $z = z_b$, donde $z_b$ es finita.

$$k'_{L,\,prom} = \sqrt{D_{AB} \cdot s} \cdot \coth \sqrt{\frac{s \cdot z_b^{\,2}}{D_{AB}}} \quad (119)$$

**e) Teoría de estiramiento superficial:**

En esta teoría se considera que la superficie interfacial a través de la cual ocurre la transferencia de masa, cambia periódicamente con el tiempo. Por lo que se tiene:

$$k'_{L,\,prom} = \frac{\left(\frac{A}{A_r}\right) \cdot \sqrt{\frac{D_{AB}}{\pi \cdot t_r}}}{\sqrt{\int_0^{t/t_r} \left(\frac{A}{A_r}\right)^2 \cdot dt}} \quad (120)$$

Donde:

$A$ : Superficie interfacial dependiente del tiempo.

$A_r$ : Un valor de referencia de $A$, definido para cada situación.

$t_r$ : Una constante, con dimensiones de tiempo de finida para cada situación[10].

**f) Teoría de la capa límite:**

En las teorías antes mencionadas, la velocidad en la superficie interfacial formada entre dos fluidos, es diferente de cero. Sin embargo cuando una de esas fases es un

[10] Por ejemplo, para la formación de una gota, $t_r$ será el tiempo de formación de la gota.

sólido, la velocidad del fluido en esta interfase es cero; pero la velocidad irá aumentando conforme aumente la distancia desde la superficie. La región de menor velocidad es llamada capa límite.

Se puede calcular el coeficiente de transferencia de masa a partir de:

$$N_A = -D_{AB} \cdot \left( \frac{\partial C_A}{\partial z} \right)_{z=0} = k_L \cdot \left( C_{A,i} - C_{A,0} \right) \quad (121)$$

Donde:

$C_{A,0}$ : Concentración uniforme de soluto en el fluido.

$C_{A,i}$ : Concentración de soluto en el fluido en la superficie del sólido.

# VII. ANÁLOGÍAS ENTRE LAS TRANSFERENCIAS DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO, CALOR Y MASA

Existe una estrecha relación entre los 3 fenómenos de transferencia, en los regímenes laminar y turbulento. Por lo que la similitud entre las ecuaciones para los procesos de transferencia de cantidad de movimiento, calor y masa, así como sus soluciones idénticas, nos permiten predecir las características de una forma de transferencia en un sistema en un sistema con una cantidad limitada de datos, mediante el conocimiento de los otros dos procesos de transferencia.

Considerando el desplazamiento de un fluido sobre una placa plana de longitud $L$, con condiciones de flujo libre o externo de $T_\infty$, $V$ y $w_{A,\infty}$ como se muestra en la figura siguiente:

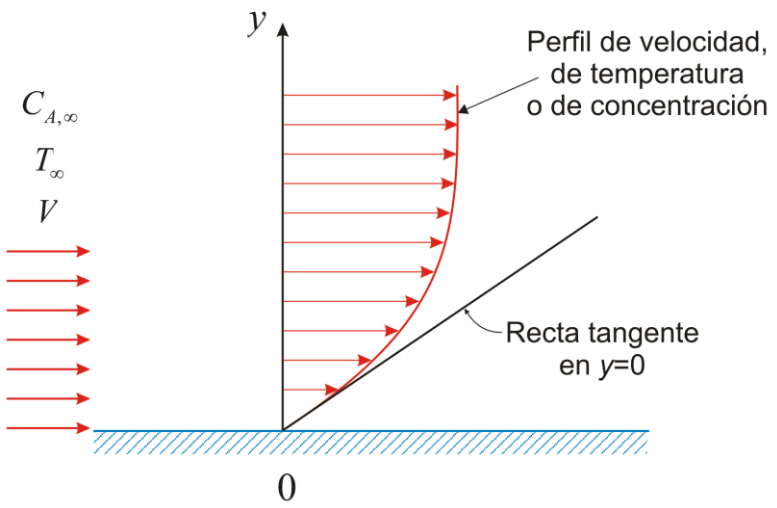



**Figura 13**: Perfiles y recta tangente de los coeficientes de cantidad de movimiento, de transferencia de calor y de transferencia de masa sobre una superficie

- La ecuación de viscosidad describe el transporte de momento a través de capas fluidas:

$$\tau_s = \mu \cdot \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{f}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \quad (122)$$

Donde:

$\tau_s$ : Esfuerzo cortante.

$\mu$ : Viscosidad dinámica.

$v$: Velocidad.

$f$ : Factor de fricción.

$\rho$ : Densidad.

$V$ : Velocidad de flujo libre en el flujo externo o la velocidad media de masa de fluido en el flujo interno[11] $\left[\frac{kg}{m^2 \cdot s}\right]$.

- La ecuación de transferencia de calor describe el transporte de energía:

$$\dot{q}_s = -k \cdot \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = h_{calor} \cdot \left(T_s - T_\infty\right) \quad (123)$$

Donde:

$k$ : Conductividad térmica.

$h_{calor}$ : Coeficiente de transferencia de calor.

$T_s$ : Temperatura de la superficie.

$T_\infty$ : Temperatura del fluido suficientemente alejado de la superficie.

- La ley de difusión describe el transporte de masa:

$$j_{A,s} = -\rho \cdot D_{AB} \cdot \left.\frac{\partial w_A}{\partial y}\right|_{y=0} = h_{masa} \cdot \rho_A \cdot \left(w_{A,s} - w_{A,\infty}\right) \quad (124)$$

Donde:

$D_{AB}$ : Coeficiente de difusividad.

$h_{masa}$ : Coeficiente de transferencia de masa.

[11] Se tratará de flujo externo o flujo interno, dependiendo de si el fluido se fuerza a moverse sobre una superficie o en el interior de un tubo.

$w_{A,s}$ : Fracción en masa de la especie *A* en la superficie (en el lado del fluido).

$w_{A,\infty}$ : Fracción en masa de la especie *A* en el flujo libre.

Estas relaciones se pueden reescribir para el flujo interno mediante el uso de propiedades medias de masa:

- La cantidad de movimiento:

$$\left.\frac{d\left(\frac{v}{V}\right)}{d\left(\frac{y}{L_C}\right)}\right|_{y=0} = \frac{f}{2}\cdot\frac{\rho\cdot V\cdot L_C}{\mu} = \frac{f}{2}\cdot \mathrm{Re} \quad (125)$$

Donde:

$\mathrm{Re}$: Número de Reynolds.

$L_C$: Longitud de entrada de concentración, que es la distancia desde la entrada del tubo hasta el lugar donde ocurre la unión de las capas límite.

- La transferencia de calor:

$$\left.\frac{d\left[\frac{(T-T_s)}{(T_\infty-T_s)}\right]}{d\left(\frac{y}{L_C}\right)}\right|_{y=0} = \frac{h_{calor}\cdot L_C}{k} = Nu \quad (126)$$

Donde:

$\mathrm{Nu}$: Número de Nusselt.

- La transferencia de masa:

$$\left.\frac{d\left[\frac{(w_A-w_{A,s})}{(w_{A,\infty}-w_{A,s})}\right]}{d\left(\frac{y}{L_C}\right)}\right|_{y=0} = \frac{h_{masa}\cdot L_C}{D_{AB}} = \mathrm{Sh} \quad (127)$$

Donde:

$D_{AB}$ : Coeficiente de difusión.

$\mathrm{Sh}$ : Número de Sherwood.

Para situaciones análogas, los perfiles de temperatura y concentración en forma adimensional así como los coeficientes de transferencia de calor y de masa en forma de grupos adimensionales, están dados por las mismas funciones. Es así que para convertir las ecuaciones o correlaciones de datos sobre la transferencia de calor a las de transferencia de masa se puede hacer uso de la tabla siguiente:

**Tabla 2:** Grupos adimensionales correspondientes de transferencia de masa y de calor

| **Transferencia de calor** | **Transferencia de masa** |
|---|---|
| $\dfrac{T-T_1}{T_2-T_1}$ | $\dfrac{C_A-C_{A,1}}{C_{A,2}-C_{A,1}}$ |
| **Numero de Reynolds** | **Numero de Reynolds** |
| $\mathrm{Re}=\dfrac{\rho\cdot v\cdot L_C}{\mu}=\dfrac{V\cdot L_C}{\nu}$ | $\mathrm{Re}=\dfrac{V\cdot L_C}{\nu}$ |
| **Número de Prandtl** | **Número de Schmidt** |
| $\mathrm{Pr}=\dfrac{c_P\cdot\mu}{k}=\dfrac{\nu}{\alpha}$ | $\mathrm{Sc}=\dfrac{\mu}{\rho\cdot D_{AB}}=\dfrac{\nu}{D_{AB}}$ |
| **Número de Nusselt** | **Número de Sherwood** |
| $\mathrm{Nu}=\dfrac{h_{calor}\cdot L_C}{k}$ | $\mathrm{Sh}=\dfrac{h_{masa}\cdot L_C}{D_{AB}}$ |
| $\mathrm{Nu}=f\left(\mathrm{Re},\mathrm{Pr}\right)$ | $\mathrm{Sh}=f\left(\mathrm{Re},\mathrm{Sc}\right)$ |
| $\mathrm{Nu}=f\left(\mathrm{Gr},\mathrm{Pr}\right)$ | $\mathrm{Sh}=f\left(\mathrm{Gr},\mathrm{Sc}\right)$ |
| **Número de Grashof** | **Número de Grashof** |
| $\mathrm{Gr}_{calor}=g\cdot {L_C}^3\cdot\beta\cdot\left(T_s-T_\infty\right)\cdot\left(\dfrac{\rho}{\mu}\right)^2$ | $\mathrm{Gr}_{masa}=\dfrac{g\cdot {L_C}^3\cdot\left(\rho_\infty-\rho_s\right)}{\rho}\cdot\left(\dfrac{\rho}{\mu}\right)^2$ |
| **Número de Péclet** | **Número de Péclet** |
| $\mathrm{Pe}_{calor}=\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}=\dfrac{c_P\cdot L_C\cdot v\cdot\rho}{k}=\dfrac{L_C\cdot V}{\alpha}$ | $\mathrm{Pe}_{masa}=\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Sc}=\dfrac{L_C\cdot V}{D_{AB}}$ |
| **Número de Stanton** | **Número de Stanton** |
| $\mathrm{St}_{calor}=\dfrac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}}=\dfrac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Pe}_{calor}}=\dfrac{h_{calor}}{\rho\cdot V\cdot c_P}$ | $\mathrm{St}_{masa}=\dfrac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Sc}}=\dfrac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{Pe}_{masa}}=\dfrac{h_{masa}}{V}$ |

Fuente: Cengel, Yunus A. (2007). Transferencia de calor y masa. 3ª ed.

En la convección de calor, las magnitudes relativas de la cantidad de movimiento y la difusión de calor en las capas límite de velocidad y térmica se expresan por el número de Prandtl:

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu \cdot c_p}{k} \quad (128)$$

donde:

$\nu$ : Difusividad de la cantidad de movimiento.

$\alpha$ : Difusividad térmica.

En la convección de masa, las magnitudes relativas de la cantidad de movimiento molecular y la difusión de masa en las capas límite de velocidad y de concentración se expresan por el número de Schmidt:

$$Sc = \frac{\nu}{D_{AB}} = \frac{\mu}{\rho \cdot D_{AB}} \quad (129)$$

Un número de Prandtl cercano a la unidad ( $\mathrm{Pr} \approx 1$ ) indica que la cantidad de movimiento y la transferencia de calor por difusión son comparables, y las capas límite de velocidad y térmica casi coinciden entre sí.

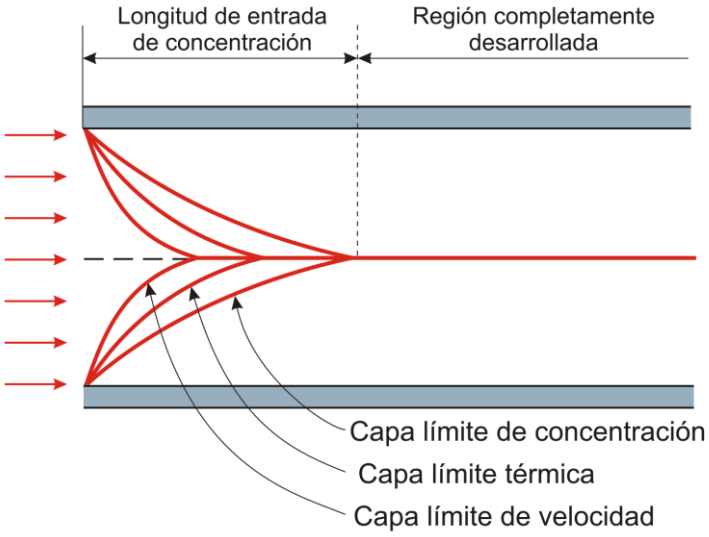



**Figura 14:** Desarrollo de las capas límite de velocidad y de concentración, en el flujo interno.

Un número de Schmidt cercano a la unidad ( $\mathrm{Sc} \approx 1$ ) indica que la cantidad de movimiento y la transferencia de masa por difusión son comparables, y las capas límite de velocidad y de concentración casi coinciden entre sí.

Para representar las magnitudes relativas de la difusión de calor y de masa en las capas límite térmica y de concentración se usa el número de Lewis:

$$\text{Le} = \frac{\text{Sc}}{\text{Pr}} = \frac{\alpha}{D_{AB}} = \frac{\text{Difusividad térmica}}{\text{Difusividad de masa}} \quad (130)$$

La razón de transferencia de calor por convección, para flujo externo, se expresó por la ley de enfriamiento de Newton:

$$\dot{q} = h_{conv} \cdot A_s \cdot (T_s - T_\infty) \quad (131)$$

donde:

$h_{conv}$: Coeficiente promedio de convección de calor.

$A_s$: Área superficial.

A menudo resulta conveniente expresar el coeficiente de transferencia de calor en términos del número adimensional de Nusselt:

$$\text{Nu} = \frac{h_{conv} \cdot L_C}{k} \quad (132)$$

donde:

$L_C$: Longitud de entrada de concentración.

De forma semejante, la razón de transferencia de masa por convección puede expresarse como:

$$\dot{m}_{conv} = h_{masa} \cdot A_s \cdot (\rho_{A,s} - \rho_{A,\infty}) = h_{masa} \cdot \rho \cdot A_s \cdot (w_{A,s} - w_{A,\infty}) \quad (133)$$

donde:

$h_{masa}$: Coeficiente promedio de transferencia de masa.

$A_s$: Área superficial.

El coeficiente de transferencia de masa se puede expresar en términos del número adimensional de Sherwood:

$$\text{Sh} = \frac{h_{masa} \cdot L_C}{D_{AB}} \quad (134)$$

A veces, es más conveniente expresar los coeficientes de transferencia de calor y de masa en términos del número adimensional de Stanton.

- Número de Stanton de la transferencia de calor:

$$\mathrm{St}_{calor} = \frac{h_{calor}}{\rho \cdot V \cdot c_P} = \mathrm{Nu} \cdot \frac{1}{\mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}} \quad (135)$$

- Número de Stanton de la transferencia de masa:

$$\mathrm{St}_{masa} = \frac{h_{masa}}{V} = \mathrm{Sh} \cdot \frac{1}{\mathrm{Re} \cdot \mathrm{Sc}} \quad (136)$$

donde:

$V$ : Velocidad de flujo libre en el flujo externo o la velocidad media de la masa de fluido en el flujo interno.

En la transferencia de masa por convección natural, se cumple la analogía entre los números de Nusselt y de Sherwood: $\mathrm{Sh} = f(\mathrm{Gr}, \mathrm{Sc})$. En donde el número de Grashof se calcula a partir de:

$$\mathrm{Gr} = \frac{g \cdot (\rho_\infty - \rho_s) \cdot {L_C}^3}{\rho \cdot \nu^2} = \frac{g \cdot \left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \cdot {L_C}^3}{\nu^2} \quad (137)$$

**Analogía de Reynolds ($\mathrm{Pr} \approx \mathrm{Sc} \approx 1$):**

Considerar el caso hipotético en el que las difusividades moleculares de la cantidad de movimiento, de calor y de la masa son idénticas: $\nu = \alpha = D_{AB}$ , de donde: $\mathrm{Pr} = \mathrm{Sc} = \mathrm{Le} = 1$, por lo que se obtiene:

$$\frac{f}{2} \cdot \mathrm{Re} = \mathrm{Nu} = \mathrm{Sh} \quad (138)$$

o

$$\frac{f}{2} \cdot \frac{V \cdot L_C}{\nu} = \frac{h_{calor} \cdot L_C}{k} = \frac{h_{masa} \cdot L_C}{D_{AB}} \quad (139)$$

Además, como $\mathrm{Pr} = \mathrm{Sc} = 1$, esta ecuación se puede escribir como:

$$\frac{f}{2} = \frac{\mathrm{Nu}}{\mathrm{Re} \cdot \mathrm{Pr}} = \frac{\mathrm{Sh}}{\mathrm{Re} \cdot \mathrm{Sc}} \quad (140)$$

o

$$\frac{f}{2} = \mathrm{St}_{calor} = \mathrm{St}_{masa} \quad (141)$$

Esta relación se conoce como la **analogía de Reynolds** y permite determinar los aparentemente no relacionados coeficientes de fricción, de transferencia de calor y de transferencia de masa, cuando sólo se conoce o se mide uno de ellos.

**Analogía de Chilton - Colburn (** $\mathrm{Pr} \neq \mathrm{Sc} \neq 1$**):**

Dada por Chilton y Colburn en 1934, como una necesidad de extender la analogía de Reynolds hacia un rango más amplio de números Pr y Sc:

$$\frac{f}{2} = \mathrm{St}_{calor} \cdot \mathrm{Pr}^{\frac{2}{3}} = \mathrm{St}_{masa} \cdot \mathrm{Sc}^{\frac{2}{3}} \quad (142)$$

Para: $0,6 < \mathrm{Pr} < 60$, y $0,6 < \mathrm{Sc} < 3000$

Aunque esta analogía también puede expresarse como:

$$\frac{h_{calor}}{h_{masa}} = \rho \cdot c_P . \left( \frac{\mathrm{Sc}}{\mathrm{Pr}} \right)^{\frac{2}{3}} = \rho \cdot c_P \cdot \left( \frac{\alpha}{D_{AB}} \right)^{\frac{2}{3}} = \rho \cdot c_P \cdot \mathrm{Le}^{\frac{2}{3}} \quad (143)$$

Como aplicación de esta analogía, se tiene que para mezclas de aire-vapor de agua, la relación entre los coeficientes de transferencia de calor y de masa se pueden expresar con gran exactitud como:

$$h_{calor} \cong \rho \cdot c_P \cdot h_{masa} \quad (144)$$

A esta relación se conoce como la relación de Lewis.

**Tabla 3:** Relaciones entre la transferencia de calor por convección y transferencia de masa por convección

| **Transferencia de calor por convección** | | **Transferencia de masa por convección** | |
|---|---|---|---|
| **1. Convección forzada sobre una placa plana** | | | |
| **a) Flujo laminar (** $\mathrm{Re} < 5\times10^5$ **)** | | | |
| $\mathrm{Nu} = 0,664\cdot\mathrm{Re}^{0,5}\cdot\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}$ | $\mathrm{Pr} > 0,6$ | $\mathrm{Sh} = 0,664\cdot\mathrm{Re}^{0,5}\cdot\mathrm{Sc}^{\frac{1}{3}}$ | $\mathrm{Sc} > 0,5$ |
| **b) Flujo turbulento (** $5\times10^5 < \mathrm{Re} < 10^7$ **)** | | | |
| $\mathrm{Nu} = 0,037\cdot\mathrm{Re}^{0,8}\cdot\mathrm{Pr}^{\frac{1}{3}}$ | $\mathrm{Pr} > 0,6$ | $\mathrm{Sh} = 0,037\cdot\mathrm{Re}^{0,8}\cdot\mathrm{Sc}^{\frac{1}{3}}$ | $\mathrm{Sc} > 0,5$ |
| **2. Flujo completamente desarrollado en tubos circulares lisos** | | | |
| **a) Flujo laminar (** $\mathrm{Re} < 2\,300$ **)** | | | |
| $\mathrm{Nu} = 3,66$ | | $\mathrm{Sh} = 3,66$ | |
| b) Flujo turbulento ( $\mathrm{Re} > 10\,000$ ) | | | |
| $\mathrm{Nu} = 0,023\cdot\mathrm{Re}^{0,8}\cdot\mathrm{Pr}^{0,4}$ | $0,7 < \mathrm{Pr} < 160$ | $\mathrm{Sh} = 0,023\cdot\mathrm{Re}^{0,8}\cdot\mathrm{Sc}^{0,4}$ | $0,7 < \mathrm{Sc} < 160$ |
| **3. Convección natural sobre superficies** | | | |
| **a) Placa vertical** | | | |
| $\mathrm{Nu} = 0,59\cdot(\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr})^{\frac{1}{4}}$ | $10^5 < \mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr} < 10^9$ | $\mathrm{Sh} = 0,059\cdot(\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Sc})^{\frac{1}{4}}$ | $10^5 < \mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Sc} < 10^9$ |
| $\mathrm{Nu} = 0,1\cdot(\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr})^{\frac{1}{3}}$ | $10^9 < \mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr} < 10^{13}$ | $\mathrm{Sh} = 0,1\cdot(\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Sc})^{\frac{1}{3}}$ | $10^9 < \mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Sc} < 10^{13}$ |
| **b) Superficie superior de una placa horizontal** | | | |
| La superficie está caliente ( $T_s > T_\infty$ ) | | El fluido cercano a la superficie es ligero ( $\rho_s < \rho_\infty$ ) | |
| $\mathrm{Nu} = 0,54\cdot(\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr})^{\frac{1}{4}}$ | $10^4 < \mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr} < 10^7$ | $\mathrm{Sh} = 0,54\cdot(\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Sc})^{\frac{1}{4}}$ | $10^4 < \mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Sc} < 10^7$ |
| $\mathrm{Nu} = 0,15\cdot(\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr})^{\frac{1}{3}}$ | $10^7 < \mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr} < 10^{11}$ | $\mathrm{Sh} = 0,15\cdot(\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Sc})^{\frac{1}{3}}$ | $10^7 < \mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Sc} < 10^{11}$ |
| **c) Superficie inferior de una placa horizontal** | | | |
| La superficie está caliente ( $T_s > T_\infty$ ) | | El fluido cercano a la superficie es ligero ( $\rho_s < \rho_\infty$ ) | |
| $\mathrm{Nu} = 0,27\cdot(\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr})^{\frac{1}{4}}$ | $10^5 < \mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Pr} < 10^{11}$ | $\mathrm{Sh} = 0,27\cdot(\mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Sc})^{\frac{1}{4}}$ | $10^5 < \mathrm{Gr}\cdot\mathrm{Sc} < 10^{11}$ |

Fuente: Cengel, Yunus A. (2007). Transferencia de calor y masa. 3ª ed.

**Problema 1:** Calcular la rapidez de absorción de $CO_2$ en una película de agua descendente sobre una pared vertical de 1 m de longitud a un gasto de 0,05 kg/s por metro de espesor a 25 °C. El gas es $CO_2$ puro a 1 atm estándar. Inicialmente, el agua está esencialmente libre de $CO_2$.

La solubilidad del CO2 en agua a 25 °C es: $C_{A,i} = 0{,}0336\ \frac{kmol}{m^3}$

$D_{AB} = 1{,}96 \times 10^{-9}\ \frac{m^2}{s}$

$\rho_{solución} = 998\ \frac{kg}{m^3}$

$\mu = 8{,}94 \times 10^{-4}\ \frac{kg}{m \cdot s}$

*Solución:*

Utilizando la ecuación:

$$\delta = \left(\frac{3 \cdot \mu \cdot \Gamma}{\rho^2 \cdot g}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\delta = \left[\frac{3 \cdot \left(8{,}94 \times 10^{-4}\ \frac{kg}{m \cdot s}\right) \cdot \left(0{,}05\ \frac{kg}{m \cdot s}\right)}{\left(998\ \frac{kg}{m^3}\right)^2 \cdot \left(9{,}81\ \frac{m}{s^2}\right)}\right]^{\frac{1}{3}} = 2{,}394 \times 10^{-4}\ m$$

El número de Reynolds es:

$$Re = \frac{4 \cdot \Gamma}{\mu} = \frac{4 \cdot \left(0{,}05\ \frac{kg}{m \cdot s}\right)}{8{,}94 \times 10^{-4}\ \frac{kg}{m \cdot s}} = 223{,}7$$

Por tratarse de un régimen laminar, se utiliza la ecuación:

$$k_{L,prom} = \left[\frac{6 \cdot D_{AB} \cdot \Gamma}{\pi \cdot \rho \cdot \delta \cdot L}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$k_{L,prom} = \left[\frac{6 \cdot \left(1{,}96 \times 10^{-9}\ \frac{m^2}{s}\right) \cdot \left(0{,}05\ \frac{kg}{m \cdot s}\right)}{\pi \cdot \left(998\ \frac{kg}{m^3}\right) \cdot (2{,}394 \times 10^{-4}\ m) \cdot (1\ m)}\right]^{\frac{1}{2}} = 2{,}80 \times 10^{-5}\ \frac{m}{s}$$

De la ecuación para el flujo total de A promedio para la superficie completa gas-líquido es:

$$N_{A,prom} = \frac{\bar{v}_y \cdot \delta}{L} \cdot \left(\bar{C}_{A,L} - C_{A,0}\right) = k_{L,prom} \cdot \left(C_{A,i} - \bar{C}_A\right)_M \quad (1)$$

Donde:

$$\left(C_{A,i} - \bar{C}_A\right)_M = \frac{\left(C_{A,i} - C_{A,0}\right) - \left(C_{A,i} - \bar{C}_{A,L}\right)}{ln\left[\frac{C_{A,i} - C_{A,0}}{C_{A,i} - \bar{C}_{A,L}}\right]} \quad (2)$$

En la parte superior:

$$C_{A,i} - \overbrace{\bar{C}_{A,0}}^{0} = 0{,}0336\ \frac{kmol}{m^3}$$

En la parte inferior:

$$C_{A,i} - \bar{C}_{A,L} = 0{,}0336\ \frac{kmol}{m^3} - \bar{C}_{A,L}$$

Además, se tiene la ecuación:

$$\bar{v}_y = \frac{\Gamma}{\rho \cdot \delta} = \frac{0{,}05\ \frac{kg}{m \cdot s}}{\left(998\ \frac{kg}{m^3}\right) \cdot (2{,}394 \times 10^{-4}\ m)} = 0{,}209\ \frac{m}{s}$$

De las ecuaciones (1) y (2):

$$\frac{\bar{v}_y \cdot \delta}{L} \cdot \left(\bar{C}_{A,L} - \overbrace{\bar{C}_{A,0}}^{0}\right) = k_{L,prom} \cdot \frac{\left(C_{A,i} - \overbrace{\bar{C}_{A,0}}^{0}\right) - \left(C_{A,i} - \bar{C}_{A,L}\right)}{ln\left[\frac{C_{A,i} - \overbrace{\bar{C}_{A,0}}^{0}}{C_{A,i} - \bar{C}_{A,L}}\right]}$$

$$\frac{\left(0{,}209\ \frac{m}{s}\right)(2{,}394 \times 10^{-4}\ m) \cdot \bar{C}_{A,L}}{1\ m} = \left(2{,}80 \times 10^{-5}\ \frac{m}{s}\right) \cdot \frac{\bar{C}_{A,L}}{ln\left[\frac{0{,}0336\ \frac{kmol}{m^3}}{0{,}0336\ \frac{kmol}{m^3} - \bar{C}_{A,L}}\right]}$$

Se encuentra que:

$$\bar{C}_{A,L} = 0{,}01438\ \frac{kmol}{m^3}$$

Reemplazando en la ecuación (1):

$$N_{A,prom} = \frac{\bar{v}_y \cdot \delta}{L} \cdot \left( \bar{C}_{A,L} - \overbrace{\bar{C}_{A,0}}^{0} \right)$$

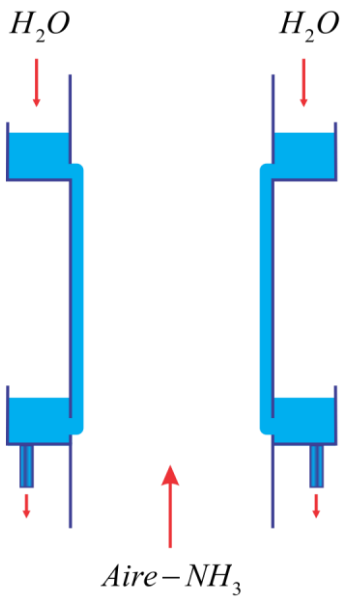
$$N_{A,prom} = \frac{\left(0{,}209\ \frac{m}{s}\right)(2{,}394 \times 10^{-4}\ m)\left(0{,}01438\ \frac{kmol}{m^3}\right)}{1\ m}$$

$$N_{A,prom} = 7{,}195 \times 10^{-7}\ \frac{kmol}{m^2 \cdot s}$$

**Problema 2:** Considere un fluido que fluye a través de un tubo circular con un diámetro igual a 25 mm donde el soluto transferido es $NH_3$ en solución diluida. Calcule el coeficiente de transferencia de masa para los siguientes datos:

$T = 25\ °C, P = 1\ atm, Re = 10\ 000, D_{AB} = 2{,}26 \times 10^{-5}\ \frac{m^2}{s}, C = 0{,}04\ \frac{kmol}{m^3}$

Para el aire: $\rho = 1{,}193\ \frac{kg}{m^3}$ y $\mu = 1{,}83 \times 10^{-5}\ \frac{kg}{m \cdot s}$




*Solución:*

Del número de Stanton:

$$St_{masa} = \frac{Sh}{Re \cdot Sc} = \frac{h_{masa}}{V}$$

$$h_{masa} = \frac{Sh \cdot V}{Re \cdot Sc} \qquad (1)$$

Para flujo turbulento ($Re > 10\,000$) en tubos circulares lisos:

$$Sh = 0{,}023 \cdot Re^{0,8} \cdot Sc^{0,4} \quad (2)$$

Del número de Schmidt:

$$Sc = \frac{\mu}{\rho \cdot D_{AB}} = \frac{1{,}83 \times 10^{-5}\ \frac{kg}{m \cdot s}}{\left(1{,}193\ \frac{kg}{m^3}\right) \cdot \left(2{,}26 \times 10^{-5}\ \frac{m^2}{s}\right)} = 0{,}678$$

Reemplazando en l ecuación (2):

$$Sh = 0{,}023 \cdot (10\,000)^{0,8} \cdot (0{,}678)^{0,4} = 31{,}2$$

La velocidad media de masa se calcula de la ecuación del número de Reynolds:

$$V = \frac{Re \cdot \mu}{\rho \cdot D} = \frac{(10\,000)\left(1{,}83 \times 10^{-5}\ \frac{kg}{m \cdot s}\right)}{\left(1{,}193\ \frac{kg}{m^3}\right)(0{,}025\ m)} = 6{,}14\ \frac{m}{s}$$

Reemplazando en la ecuación (1):

$$h_{masa} = \frac{(31{,}2)\left(6{,}14\ \frac{m}{s}\right)}{(10\,000)(0{,}678)} = 0{,}0283\ \frac{m}{s}$$

Pero:

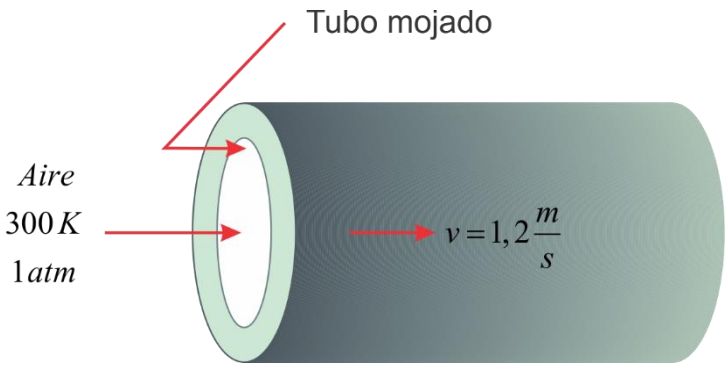
$$F = h_{masa} \cdot C$$

$$F = \left(0{,}0283\ \frac{m}{s}\right)\left(0{,}04\ \frac{kmol}{m^3}\right) = 1{,}132 \times 10^{-3}\ \frac{kmol}{m^2 \cdot s}$$

**Problema 3:** Considere un tubo circular de diámetro interior D=0,015 m cuya superficie interior está cubierta con una capa de agua líquida como resultado de la condensación. Para secar el tubo, se fuerza a fluir por él aire a 300 K y 1 atm con una velocidad promedio de 1,2 m/s. Si se aplica la analogía entre la transferencia de masa y la de calor, determine el coeficiente de transferencia de masa en el interior del tubo, para flujo completamente desarrollado.

Se puede utilizar la ecuación de Marrero y Mason para encontrar el coeficiente de difusión del vapor de agua en el aire:

$$D_{H_2O-Aire} = 1{,}87 \times 10^{-10} \cdot \frac{T^{2,072}}{P}\ \left(\frac{m^2}{s}\right),\ 280\ K < T < 450\ K$$




*Solución:*

Del aire a 300 K y 1 atm, se encuentra: $v = 1{,}58 \times 10^{-5}\ \frac{m^2}{s}$

Utilizando la ecuación de Marrero y Mason:

$$D_{H_2O-Aire} = 1{,}87 \times 10^{-10} \cdot \frac{(300)^{2{,}072}}{1} = 2{,}54 \times 10^{-5}\ \frac{m^2}{s}$$

Encontrando el número de Reynolds:

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\mu} = \frac{v \cdot D}{\upsilon} = \frac{\left(1{,}2\ \frac{m}{s}\right) \cdot (0{,}015\ \text{m})}{1{,}58 \times 10^{-5}\ \frac{m^2}{s}} = 1\ 139\ \text{(Régimen laminar)}$$

Con base en la analogía entre la transferencia de calor y masa:

$$Nu = Sh = 3{,}66$$

Aplicando la definición del número de Sherwood, y considerando:

$$L_C = D$$

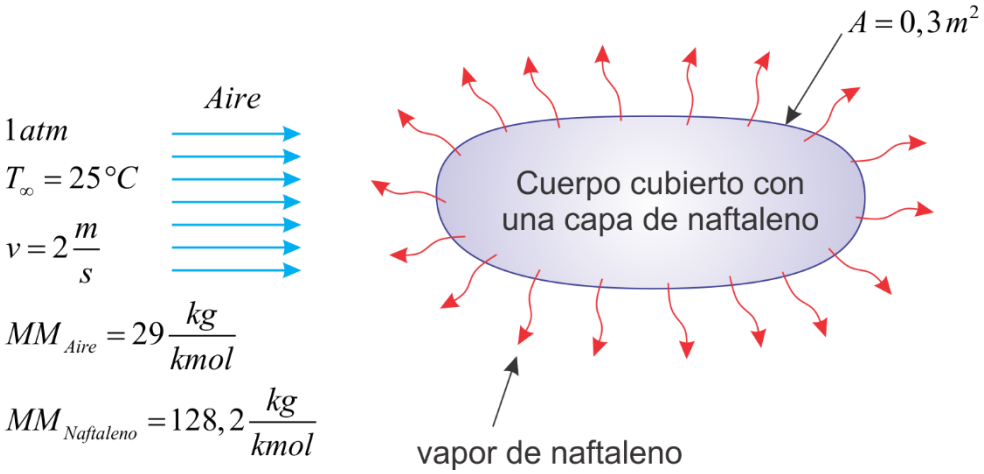
$$Sh = \frac{h_{masa} \cdot D_{AB}}{D}$$

$$h_{masa} = \frac{Sh \cdot D_{AB}}{D} = \frac{(3{,}66)\left(2{,}54 \times 10^{-5}\ \frac{m^2}{s}\right)}{0{,}015\ \text{m}} = 0{,}00620\ \frac{m}{s}$$

**Problema 4:** Pueden determinarse los coeficientes de transferencia de calor en configuraciones geométricas complejas, con condiciones complicadas en la frontera, por las mediciones de la transferencia de masa en configuraciones geométricas semejantes, en condiciones similares de flujo, con el uso de sólidos volátiles, como el naftaleno y el diclorobenceno, y utilizando la analogía de Chilton-Colburn entre la

transferencia de calo y de masa en condiciones de flujo bajo de masa. Se determina la cantidad de masa que se transfiere en el lapso de un periodo especificado, pesando el modelo o midiendo la recesión de la superficie.

En el curso de cierto experimento en el que interviene el flujo de aire seco a 25 °C y 1 atm, con una velocidad de flujo libre de 2 m/s, sobre un cuerpo cubierto con una capa de naftaleno, se observa que se han sublimado 12 g de naftaleno en 15 minutos. El área superficial del cuerpo es de 0,3 $m^2$. Tanto el cuerpo como el aire se mantuvieron a 25 °C en el curso del estudio. La presión de vapor del naftaleno a 25 °C es de 11 Pa y la difusividad de masa del propio naftaleno en aire a 25 °C es $D_{AB}=0{,}61\times10^{-5}$ $m^2/s$. determine el coeficiente de transferencia de calor en las mismas condiciones de flujo, sobre la misma configuración geométrica.




*Solución:*

Pueden utilizarse las propiedades del aire seco para la mezcla:

Aire a 25 °C y 1 atm:

$$\rho = 1{,}184\ \frac{kg}{m^3}$$

$$c_P = 1007\ \frac{J}{kg\cdot K}$$

$\alpha = 2{,}141 \times 10^{-5}\ \frac{m^2}{s}$ (Difusividad térmica)

La función de masa del naftaleno en las condiciones de flujo libre es: $w_{A,\infty} = 0$

La fracción de masa del naftaleno en la superficie:

$$w_{A,s} = \frac{P_{A,s}}{P_{Aire}} \cdot \left(\frac{MM_A}{MM_{Aire}}\right) = \frac{(11\ Pa)}{(101\ 325\ Pa)} \cdot \left(\frac{128{,}2\ \frac{kg}{kmol}}{29\ \frac{kg}{kmol}}\right) = 4{,}8 \times 10^{-4}$$

La razón de evaporación del naftaleno es:

$$\dot{m}_{evap} = \frac{m}{\Delta t} = \frac{0{,}012\ kg}{15\ min \times \frac{60\ s}{1\ min}} = 1{,}33 \times 10^{-5}\ \frac{kg}{s}$$

De la ecuación:

$$\dot{m} = h_{masa} \cdot \rho \cdot A_s \cdot \left(w_{A,s} - w_{A,\infty}\right)$$

$$h_{masa} = \frac{\dot{m}}{\rho \cdot A_s \cdot \left(w_{A,s} - w_{A,\infty}\right)} = \frac{1{,}33 \times 10^{-5}\ \frac{kg}{s}}{\left(1{,}184\ \frac{kg}{m^3}\right)(0{,}3\ m^2)(4{,}8 \times 10^{-4} - 0)}$$

$$h_{masa} = 0{,}0780\ \frac{m}{s}$$

De la ecuación de la analogía de Chilton-Colburn:

$$h_{calor} = h_{masa} \cdot \rho \cdot c_P \cdot \left(\frac{\alpha}{D_{AB}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

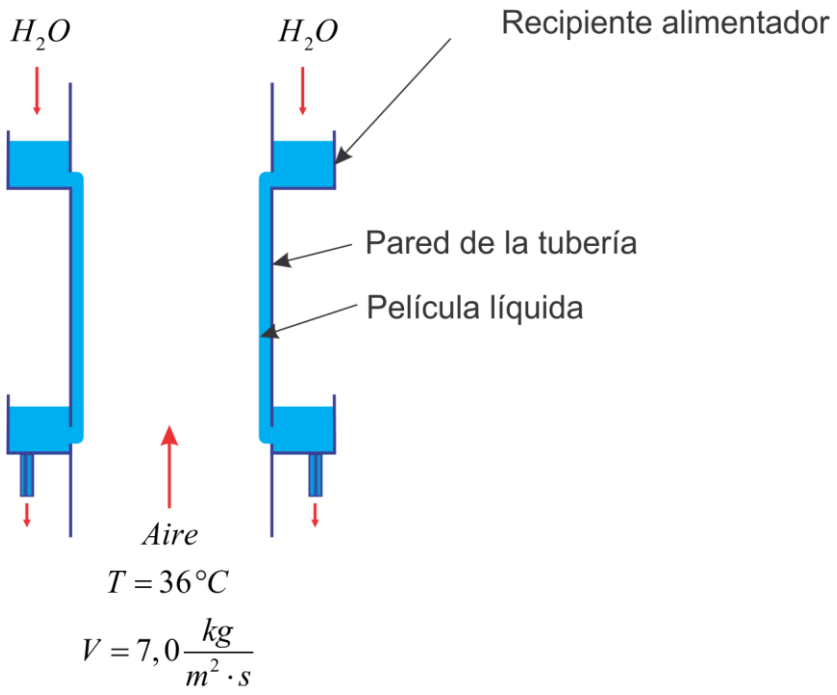
$$h_{calor} = \left(0{,}0780\ \frac{m}{s}\right)\left(1{,}184\ \frac{kg}{m^3}\right)\left(1007\ \frac{J}{kg \cdot K}\right)\left(\frac{2{,}141 \times 10^{-5}\ \frac{m^2}{s}}{0{,}61 \times 10^{-5}\ \frac{m^2}{s}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$h_{calor} = 215\ \frac{W}{m^2 \cdot K}$$

**Problema 5:** Está fluyendo agua en forma descendente por la pared interior de una torre de paredes mojadas con el diseño de la figura; al mismo tiempo, en forma ascendente está fluyendo aire a través del centro. En un caso particular, el diámetro interior es 25,4 mm; el aire seco entra con una rapidez de 7,0 kg/m$^2$.s de sección transversal interna. Supóngase que el aire tiene una temperatura promedio homogénea de 36 °C, el agua de 21 °C; el coeficiente de transferencia de masa considérese

constante. P=1 atm. Calcule la presión parcial promedio del agua en el aire que se aleja, si la torre tiene 1 m de longitud.

$$D_{AB} = 0{,}256 \times 10^{-4}\ \frac{m^2}{s}$$




*Solución:*

Agua a $T = 21\ °C$:

$$P_{A,1} = 0{,}0245\ atm$$

Aire a $T = 36\ °C$:

$$\rho = 1{,}129\ \frac{kg}{m^3}$$

$$\mu = 1{,}8469 \times 10^{-5}\ \frac{kg}{m \cdot s}$$

Haciendo: $l_C = D$, se puede calcular:

$$Re = \frac{V \cdot D}{\mu} = \frac{\left(7\,\frac{kg}{m^2 \cdot s}\right)(0{,}0254\ m)}{1{,}8469 \times 10^{-5}\,\frac{kg}{m \cdot s}} = 9\,627 \text{ (Régimen Turbulento)}$$

$$Sh = 0{,}023 \cdot Re^{0{,}8} \cdot Sc^{0{,}4} \quad (1)$$

El número de Schmidt:

$$Sc = \frac{\mu}{\rho \cdot D_{AB}} = \frac{1{,}8469 \times 10^{-5}\ \frac{kg}{m \cdot s}}{\left(1{,}129\ \frac{kg}{m^3}\right)\left(0{,}256 \times 10^{-4}\ \frac{m^2}{s}\right)} = 0{,}6390$$

Reemplazando en la ecuación (1):

$$Sh = 0{,}023 \cdot (9\ 627\ )^{0{,}8} \cdot (0{,}6390)^{0{,}4} = 29{,}56$$

Por definición del número de Sherwood:

$$Sh = \frac{h_{masa} \cdot D_{AB}}{D}$$

$$h_{masa} = \frac{Sh \cdot D_{AB}}{D} = \frac{(29{,}56)\left(0{,}256 \times 10^{-4}\ \frac{m^2}{s}\right)}{0{,}0254\ \text{m}} = 2{,}979 \times 10^{-2}\ \frac{m}{s}$$

De la siguiente ecuación:

$$N_A = \frac{N_A}{N_A + \overbrace{N_B}^{0}} \cdot F \cdot \ln\left[\frac{\frac{N_A}{N_A + \overbrace{N_B}^{0}} - \frac{C_{A,2}}{C}}{\frac{N_A}{N_A + \overbrace{N_B}^{0}} - \frac{C_{A,1}}{C}}\right]$$

$$N_A = F \cdot \ln\left[\frac{1 - \frac{P_{A,2}}{P}}{1 - \frac{P_{A,1}}{P}}\right] \qquad (2)$$

Además:

$$F = h_{masa} \cdot C \qquad (3)$$

$$T_{prom} = \frac{36\ °C + 21\ °C}{2} = 28{,}5\ °C = 301{,}5\ K$$

$P = 1\ atm$ y $P_{A,1} = 0{,}0245\ atm$

$$C = \frac{P}{R \cdot T} = \frac{1\ atm}{\left(0{,}082\ \frac{atm \cdot L}{mol \cdot K}\right)(301{,}5\ K) \times \frac{1\ m^3}{10^3\ L} \times \frac{10^3\ mol}{1\ kmol}} = 0{,}0404\ \frac{kmol}{m^3}$$

Entonces:

$$F = 1{,}2035 \times 10^{-3}\ \frac{kmol}{m^2 \cdot s}$$

Además:

$$N_A = K_G \cdot \left(P_{A,1} - P_{A,2}\right) \qquad (4)$$

Igualando las ecuaciones (2) y (4):

$$K_G \cdot \left(P_{A,1} - P_{A,2}\right) = F \cdot \ln\left[\frac{1-\frac{P_{A,2}}{P}}{1-\frac{P_{A,1}}{P}}\right] \qquad (5)$$

Según el enunciado del problema, el coeficiente de transferencia de masa $K_G$ es constante. Se puede tomar un $K_G$ promedio para diversos valores de $P_{A,2}$.

| $P_{A,2}$ | $N_A$ (Ecuación 2) | $K_G$ (Ecuación 4) |
|---|---|---|
| 0,010 | $1{,}7758\times10^{-5}$ | 0,0012247 |
| 0,011 | $1{,}6541\times10^{-5}$ | 0,0012253 |
| 0,012 | $1{,}5324\times10^{-5}$ | 0,0012259 |
| 0,013 | $1{,}4105\times10^{-5}$ | 0,0012265 |
| 0,014 | $1{,}2885\times10^{-5}$ | 0,0012272 |
| 0,015 | $1{,}1664\times10^{-5}$ | 0,0012278 |
| 0,016 | $1{,}0441\times10^{-5}$ | 0,0012284 |
| 0,017 | $9{,}2177\times10^{-6}$ | 0,0012290 |
| 0,018 | $7{,}9927\times10^{-6}$ | 0,0012297 |
| 0,019 | $6{,}7665\times10^{-6}$ | 0,0012297 |
| 0,020 | $6{,}7665\times10^{-6}$ | 0,0012309 |

$$K_{G\ Promedio} = 1{,}2290 \times 10^{-3}\ \frac{kmol}{m^2 \cdot s \cdot atm}$$

Reemplazando en la ecuación (3):

$$(1{,}2290 \times 10^{-3}) \cdot \left(0{,}0245 - P_{A,2}\right) = 1{,}2035 \times 10^{-3} \cdot \ln\left[\frac{1 - P_{A,2}}{1 - 0{,}0245}\right]$$

$$\frac{\ln\left[\frac{1 - P_{A,2}}{0{,}9755}\right]}{0{,}0245 - P_{A,2}} = \underbrace{1{,}02121}_{R}$$

Interpolando:

| $P_{A,2}$ | | R |
|---|---|---|
| 0,010 | | 1,01757 |
| $P_{A,2}$ | → | 1,02121 |
| 0,020 | | 1,02276 |

De donde:

$$P_{A,2} = 0{,}01699\ atm$$

# VIII. TRANSFERENCIA DE MASA ENTRE FASES GASEOSA Y LÍQUIDA

Considerando que la transferencia de un gas hacia un líquido, ocurre en 3 etapas:

a) Difusión desde el gas hacia la superficie líquida.

b) Disolución en el líquido.

c) Difusión desde la superficie del líquido hacia el interior del mismo.

Este proceso se ilustra en la figura siguiente:

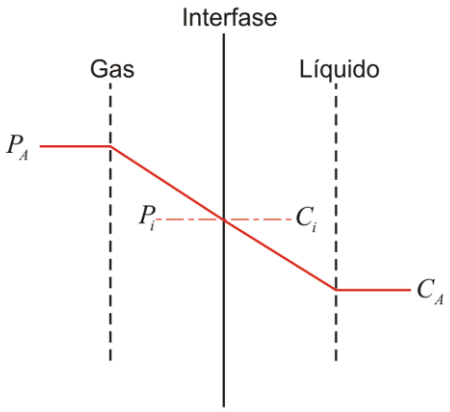



**Figura 15:** Interfase gas - líquido

Los coeficientes individuales de transferencia de masa se definen como:

$$k_G = \frac{N_A}{P_A - P_{A,i}} \quad (145)$$

$$k_L = \frac{N_A}{C_{A,i} - C_A} \quad (146)$$

donde:

$N_A$: Velocidad de transferencia.

$P_A$: Presión parcial del componente A en el gas.

$P_{A,i}$: Presión parcial del componente A en la interfase.

$C_A$: Concentración del soluto A en el líquido.

$C_{A,i}$: Concentración del soluto A en la interfase.

$k_G$ : Coeficiente pelicular en la fase gaseosa.

$k_L$ : Coeficiente pelicular en la fase líquida.

Los coeficientes globales de transferencia de masa son:

$$K_G = \frac{N_A}{P_A - P^*} \quad (147)$$

$$K_L = \frac{N_A}{C^* - C_A} \quad (148)$$

donde:

$P^*$ : Presión parcial en el equilibrio con $C_A$.

$C^*$ : Concentración en equilibrio con $P_A$.

Si la solución obedece la ley de Henry ( $P = H \cdot C$ ), se tiene:

$$P_A = H \cdot C^* \quad (149)$$

$$P^* = H \cdot C_A \quad (150)$$

$$P_{A,i} = H \cdot C_{A,i} \quad (151)$$

Donde $H$ es una constante.

De las ecuaciones anteriores se tiene:

$$\frac{1}{K_G} = \frac{P_A - P^*}{N_A} = \frac{P_A - P_{A,i}}{N_A} + \frac{H \cdot \left(C_{A,i} - C_A\right)}{N_A} \quad (152)$$

$$\frac{1}{K_G} = \frac{1}{k_G} + \frac{H}{k_L} \quad (153)$$

y

$$\frac{1}{K_L} = \frac{C^* - C_A}{N_A} = \frac{P_A - P_{A,i}}{H \cdot N_A} + \frac{C_{A,i} - C_A}{N_A} \quad (154)$$

$$\frac{1}{K_L} = \frac{1}{H \cdot k_G} + \frac{1}{k_L} \quad (155)$$

Para gases muy solubles, por ejemplo amoniaco en agua, donde $H$ es muy pequeño:

$$K_G \approx k_G$$

Para solubilidades de gases muy bajas, por ejemplo oxígeno en agua, $H$ es grande:

$$K_L \approx k_L$$

# Bibliografía


[1] Asano, Koichi, *Mass Transfer.* John Wiley & Sons. Alemania (2006)

[2] Bird, R. Byron, Stewart, Warren E., Lightfoot, Edwin N. *Fenómenos de Transporte*. Editorial Reverté S.S. España (1997)

[3] Bureau International des Poids et Mesures. *The International System of units (SI)*. Eighth edition. French (2006)

[4] Cengel, Yunus A. *Transferencia de calor y masa*. Tercera edición. McGraw-Hill, México (2007)

[5] Geankoplis, Christie J. *Procesos de Transporte y Operaciones Unitarias*. Tercera edición. Editorial Continental S.A. México (1998)

[6] McCabe, W.; Smith, J. Harriott, P. *Operaciones básicas de Ingeniería Química*. Madrid: McGraw-Hill/Interamericana de España S. A.(1991)

[7] Treybal, R. *Operaciones de transferencia de masa.* 2ª ed. McGraw-Hill, México.(1994)

[8] Welty, J., Wicks, C. y Wilson, R. *Fundamentos de la Transferencia de Momentum, Calor y Masa*. Segunda edición. Editorial Limusa S.A. México (2000)