Johnny Mitchell Gomero Mancesidor
Froy Richard Gomero Mancesidor

Teoría de Conjuntos Y Lógica Matemática

Serie Notas de Clases

Editorial UNAB

Universidad Nacional de Barranca

Comisión Organizadora

Inés Miriam Gárate Camacho
Presidenta

Tarcila Cruz Sánchez
Vicepresidenta Académica

Luis Enrique Carrillo Díaz
Vicepresidente de Investigación

Dirección General de Investigación

Elizabeth Del Pilar Paredes Cruz
Directora

Oficina de Publicaciones Científicas

Hernán Verde Luján
Jefe

2017

Editorial UNAB

Johnny Mitchell Gomero Mancesidor[1]
Froy Richard Gomero Mancesidor

Serie Notas de Clases

Ediciones UNAB

[1] Profesor del Deparatmento de Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Barranca
Lima, Perú

Serie

Notas de Clases

Si un país es regido por los principios de la razón, la pobreza y la miseria son objetos de verguenza. Si un país no es regido por los principios de la razón, la riqueza y las honras son objetos de verguenza.

Confucio (Siglo V a.c)

DEDICATORIA

Para nuestra madre YOLANDA MANCESIDOR FLORES por su apoyo incondicional y que siempre nos motiva para seguir adelante y conseguir nuestras metas propuestas, enseñándonos a soñar y esforzarse por ello.

Autores.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

1. TEORÍA DE CONJUNTOS

1.1 Definición:

La palabra conjunto generalmente la asociamos con la idea de agrupar objetos, por ejemplo un conjunto de discos, de libros, de plantas de cultivo y en otras ocasiones en palabras como hato, rebaño, piara, parcelas, campesinado, familia, etc., es decir la palabra conjunto denota una colección de elementos claramente entre sí, que guardan alguna característica en común. Ya sean números, personas, figuras, ideas y conceptos. En matemáticas el concepto de conjunto es considerado primitivo y ni se da una definición de este, sino que se trabaja con la notación de colección y agrupamiento de objetos, lo mismo puede decirse que se consideren primitivas las ideas de elemento y pertenencia. La característica esencial de un conjunto es la de estar bien definido, es decir que dado un objeto particular, determinar si este pertenece o no al conjunto. Por ejemplo si se considera el conjunto de los números pares, sabemos que el 4 pertenece al conjunto, pero el 7 no. Por otro lado el conjunto de las bellas obras musicales no es un conjunto bien definido, puesto que diferentes personas puedan incluir distintas obras en el conjunto. Los objetos que forman un conjunto son llamados miembros o elementos:

Ejemplos:

- Los números impares 1, 3, 5, 7 forman un conjunto de cuatro elementos
- Los meses del año forman un conjunto de 12 elementos.
- El conjunto de las letras de alfabeto; a, b, c, ..., x, y, z. que se puede escribir así:{ a, b, ..., y, z}

1.2. NOTACIÓN:

Mayormente los conjuntos se denotan por letras mayúsculas:

A, B, C,…, X, Y, Z

y los elementos que determinan o conforman el conjunto se designan por letras minúsculas:

a, b, c,…, x, y, z

Entonces el conjunto A está formado por los elementos 1,3, 5, 7 se escribe:

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$

Y se lee: “A es el conjunto de los elementos 1, 3, 5, 7”

Observación: que los elementos van separados por comas y encerrados entre llaves {}.

1.3. RELACIÓN DE PERTENENCIA (∈):

La relación de pertenecía se indica por la letra griega épsilon ∈, de modo que:

$x \in A$ indica (se lee): $\begin{cases} \text{x pertenece al conjunto A} \\ \text{x es elemento del conjunto A} \end{cases}$

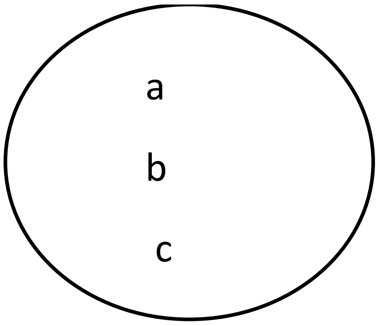
$y \notin A$ indica (se lee): $\begin{cases} \text{y no pertenece al conjunto A} \\ \text{y no es elemento del conjunto A} \end{cases}$

1.4. DIAGRAMAS DE VENN:

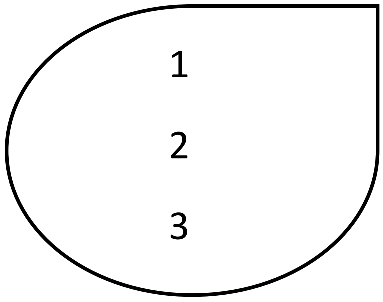
Es una representación gráfica, normalmente óvalos, círculos o curvas cerradas, que nos muestra las relaciones existentes entre los conjuntos. Cada óvalo o círculo es un conjunto diferente. La forma en que esos círculos se sobreponen entre sí muestra todas las posibles relaciones lógicas entre los conjuntos que representan. Por ejemplo, cuando los círculos se superponen, indican la existencia de subconjuntos con algunas características comunes.

Ejemplo:

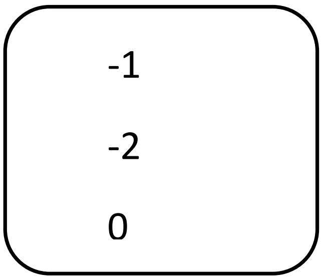
A = {a, b, c}; su diagrama de venn



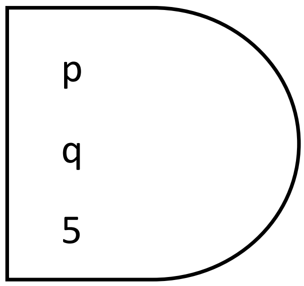
B = {1, 2, 3} su diagrama de venn es:



C = {-1, -2, 0}; su diagrama de venn es:



D = {p, q, 5}; su diagrama de venn es:



1.5. DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

U9n conjunto se encuentra bien determinado, cuando se conoce con exactitud qué elementos pertenecen o no al conjunto. Cuando se conoce que elementos conforman (pertenecen) o no conforman (no pertenecen) al conjunto se dice que está bien definido. Existen dos maneras de especificar o determinar un conjunto dado: por extensión y comprensión;

1.5.1. Por extensión: Un conjunto está determinado por extensión cuando se escriben uno a uno todos sus elementos y cuando se conocen individualmente todos sus elementos.

Ejemplos:

1. El conjunto A de los números naturales impares mayores que cero y menor o igual que 9. Queda definido por extensión si escribimos.

   A= {1,3, 5, 7, 9}

2. Sea C el conjunto de elementos a el conjunto {p, q}, r, s. Queda definido por extensión si escribimos.

   C= {a, {p, q}, r, s}

   Observación: a ∈ C, {p, q}∈ C, p ∉ C, q ∉ C, r, s ∈ C

3. D = {0, 1, 2, 3, 4, 5,…………………}

   Sin embargo, no todos los conjuntos pueden ser determinados de esta sobre todo cuando el número de elementos que constituyen el conjunto es muy elevado. Imagine los casos de aquellos conjuntos que tienen infinitos elementos como el conjunto de estrellas del universo.

Es por ello, que necesariamente, se debe emplear otro procedimiento para determinar los conjuntos que tienen muchos elementos. A esta otra forma de determinar a un conjunto se le denomina comprensión que también se puede utilizar para cualquier conjunto.

1.5.2. Por comprensión: Un conjunto "B" está determinado por comprensión cuando se enuncia una ley, una función o propiedad que permita conocer que elementos la cumplen y por tanto, van a pertenecer al conjunto B. si denotamos por x a un elemento cualquiera del conjunto B y por P a la propiedad característica, se escribe:

B= {x / x cumple p}

Ejemplos:

1. Por extensión:

   D = {lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo}

   Por comprensión: (una posible respuesta sería)

   D = {x/"x" es un día de la semana}

   Se lee:

   "El conjunto D está formado por todos los elementos "x" que satisfacen la condición de ser un día de la semana".

   Otra posible respuesta sería:

"D es el conjunto constituido por todos los elementos "x" tal que X es un día de la semana"

2. Por extensión:

   A= {0,2, 4, 6, 8,…}; se observa que sus elementos son números naturales múltiplos de 2,

   Por compresión:

   A= {x / x es un numero natural y múltiplo de 2}

3. Por extensión:

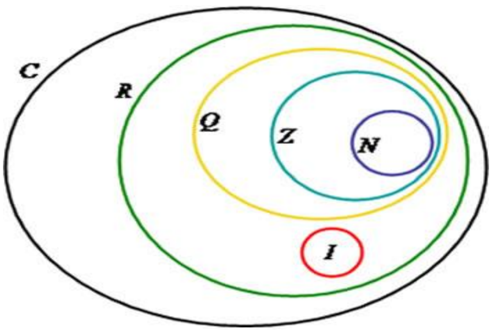
   B= {-3, 1, 2}

   Por compresión:

   B= {x / x^3 -7x + 6 = 0}

1.6. CONJUNTOS NUMÉRICOS

En matemáticas los conjuntos numéricos característicos que se estudian son: los números naturales, los números enteros, los números racionales, los números irracionales, números reales y los números complejos.



Notación	**Conjuntos Numéricos**
N:	Conjunto de números naturales
Z:	Conjunto de números enteros
Q:	Conjunto de números racionales
I:	Conjunto de números irracionales
R:	Conjunto de números reales
C:	Conjunto de números complejos

- **C** Complejos $\sqrt{-1}$
  - **R** Reales
    - **Q** Racionales
      Q = $\{\frac{a}{b}$ / a, b $\in Z, \; b \; \neq 0\}$
      - Z_0^+ =
        - N = {1,2,...n...}
        - Entero positivo
        - N_0= {0, 1,2...n...}
      - Z^- enteros negativos
      - Decimales Periódicos = $0.\overline{abc} = \frac{abc}{999}$
      - Decimales periódicos mixto = $0.ab\overline{cde} = \frac{abcde-ab}{99900}$
      - Decimales exactos = 0.abc = $\frac{abc}{1000}$
    - **I** Irracionales
      - Propios = $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, ...
      - Trascendentes = π, e

Observaciones: El conjunto de los números reales, es la reunión de los números naturales, enteros, racionales e irracionales, es decir:

$$R= N \cup Z \cup Q \cup I$$

1.7. CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Desde un punto de vista intuitivo, un conjunto es finito si consta de un determinado número de elementos distintos, es decir, si consta de un primer y último elementos, o si a contar sus diferentes elementos, el proceso de contar se termina. En caso contrario, el conjunto es infinito.

Ejemplos:

1. A= {x / x es un numero natural y múltiplo de 2}

   A es un conjunto infinito
2. B= {x / x las estaciones del año}

   B es un conjunto finito
3. C= {x / x / x^3 -7x + 6 = 0}

   C es un conjunto finito
4. D= {1, 2, 3, 4, 5, 6…….}

   D es un conjunto infinito

1.8. RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Muchas veces, como ya has comprobado en los distintos ejercicios, unos conjuntos tienen unos pocos elementos más que otro, es decir, todos los elementos de uno de ellos están en el otro, en ese caso diremos que uno de ellos está contenido en el otro. La relación de conjunto a conjunto puede ser de inclusión o de igualdad. Es decir, dado dos conjuntos A y B incluidos en un cierto universo, puede ocurrir que: $A \subset B$ (A está incluido en B), $B \subset A$ (B esa incluido en A), $A = B$ (A es igual a B)

1.8.1. Inclusión de conjuntos (sub conjuntos)

Definición:

$$A \subset B \leftrightarrow (\forall x) / x \in A \rightarrow x \in B$$

A esta contenido en B

A es subconjunto de B

A es parte de B

La notación $A \subset B$, se lee: A está incluido en B si y solo si para todo x, tal que, x pertenece a A, implica que x pertenece a B.

En conclusión: $A \subset B$ si, y solo si todo elemento de A esta también en B.

Ejemplos:

1. $A = \{1, 3, 5, 7\}$

B= {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

C = {p, q, r, s, t}

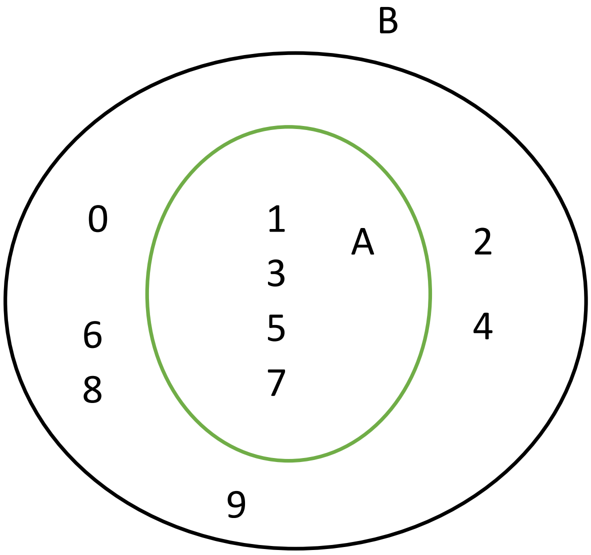
D = {p, q, m, n, t}

Entonces podemos decir que:

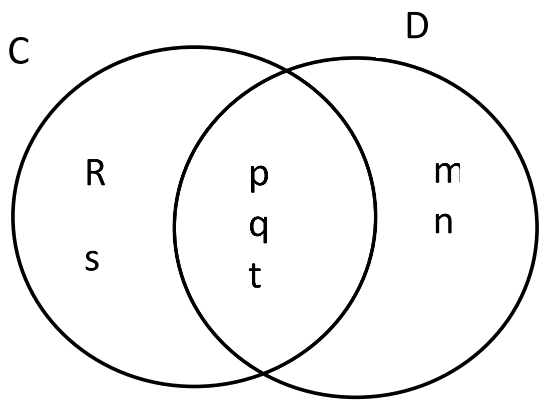
$A \subset B$; porque todos los elementos de A están en B

$C \not\subset D$; porque no todos los elementos de C están en D

Grafico:



$A \subset B$



$C \not\subset D$

1.8.2. Sub conjunto propio:

Diremos que A es sub conjunto propio de B, si: $A \subset B \wedge A \neq B$

La notación:

$$\left.\begin{matrix} A \subset B \\ A \neq B \end{matrix}\right\}$$

Se lee: A es un sub conjunto propio de B

O

A es una parte propia de B

1.8.3. Propiedades de la inclusión:

Si A, B y E son conjuntos arbitrarios, entonces las propiedades de la inclusión son:

$A \subset A$ (P. Reflexiva)

Si $A \subset B \wedge B \subset E \rightarrow A \subset E$ (P. Transitiva)

Si $A \subset B \wedge B \subset A \rightarrow A = B$ (P. Antisimétrica)

$\forall$ A, $\emptyset \subset A$ el conjunto vacío está incluido en cualquier conjunto.

Es verdadero: $\emptyset \in p(A) \wedge \emptyset \subset p(A)$, p(A) es el conjunto potencia de A.

1.9. Igualdad de Conjuntos

Dos conjuntos A y B se dice que son iguales, lo que se escribe A=B si constan de los mismos elementos. Es decir, si y solo si todo elemento de A está también contenido en B y todo elemento de B está contenido en A. En símbolos:

Notación: $A = B \leftrightarrow [A \subset B \wedge B \subset A]$

Se lee: el conjunto A es igual al conjunto B, si y solo si A está contenido en B y B está contenido en A

1.9.1. Propiedades de la igualdad de conjuntos

a) $A = A, \forall A$ (reflexiva)

b) $A = B \rightarrow B = A$ (simétrica)

c) A = B y B = C → $A = C$ (transitiva)

Demostración:

a)

1. A ⊂ A; por reflexividad de inclusión.
2. A = A ; a y definición de igualdad

b)

1. A = B ; por hipótesis
2. A ⊂ B ^ B ⊂ A ; 1 def. de =
3. B ⊂ A ^ A ⊂ B ; 2 y la ley conmutativo
4. B = A ; 3 y definición de =

c)

1. A = B ; por hipótesis
2. A ⊂ B ^ B ⊂ A ; 1 definición de =
3. B = C : por hipótesis
4. B ⊂ C ^ C ⊂ B ; 3 definición de =
5. A ⊂ B ^ B ⊂ A ; 2 y 4 y transitiva de inclusión
6. A ⊂ C ; 5 transitiva inclusión.
7. C ⊂ B ^ B ⊂ A ; 4 y 3 y transitiva
8. C ⊂ A ; 7 transitiva inclusión.
9. A = C **;** 6 y 8 definición de =

Ejemplos:

1. A={1,2,3,4,5,6} B={6,5,4,3,2,1}

A=B Se dice que el conjunto A es igual al conjunto B.

2. P = {-1/2, 3} Q = {x ∈ Z/ $2x^2 - 5x - 3 = 0$}

Q es el conjunto solución de la ecuación: $2x^2 - 5x - 3 = 0$; donde x = -1/2 o 3 que son los elementos de P, entonces P = Q

1.10. Conjuntos Especiales

1.10.1. Conjunto universal

Siempre va existir, ya sea de forma explícita o implícita; este conjunto contiene a todos los elementos que está en el universo del conjunto; de este conjunto podemos formar subconjuntos.

El conjunto universal se denota con la letra U.

Un poco enredado pero veamos los siguientes

Ejemplos:

1. El conjunto universal U = {x ∈ N_0/ $3 < x \leq 15$} es el universo de los conjuntos Q = {4, 6, 8, 10, 12, 14}, P = {5, 7, 9, 11, 13, 15}; porque todos los elementos de los conjuntos P, Q pertenecen al conjunto U.

2. Dado el conjunto universal U = {x ∈ Z^+/ $x \leq 80$}; Hallar los siguientes conjuntos:

a) P = {x / $x^3 \leq 70$};

Entonces tenemos los elementos del conjunto P.

P = {1, 2, 3, 4};

b) Q = { $\frac{x}{2}$ / x ≤ 20};

Entonces tenemos los elementos del conjunto Q.

Q= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10};

1.10.2. Conjunto vacío

Conjunto que no tiene elementos. Este conjunto tiene la particularidad de ser subconjunto de todo conjunto. Para representar a este conjunto, hay dos formas la más sencilla es dos llaves { }, si se dan cuenta no tiene ningún elemento dentro de ellas, por eso es vacío.

El otro es un símbolo en especial que representa simbólicamente por la letra griega ∅ (phi) y se define como:

$$\emptyset = \{ x / \ \ x \neq x\}$$

Ejemplo:

1. El conjunto formado por todos los números pares y que al mismo tiempo son impares.

   Esto sería igual a { }, porque no existe ningún número par que sea al mismo tiempo impar, por lo tanto el conjunto resulta ser vacío.

2. P = {x ∈ Z/ $5 < x < 6$ }; los elementos de conjunto P viene ser vacío, porque no existe un numero entero que sea mayor que 5 y menor que 6

   P = {∅}
3. Q = {x ∈ Z/ $-\frac{1}{5} \leq 3x - \frac{1}{4} \leq \frac{1}{3}$ }; los elementos del conjunto Q viene ser vacío porque la respuesta es de 1/60 y 7/37 y estos dos elementos no son enteros.

   Q = {∅}

1.10.3. Conjuntos disjuntos o ajenos:

Estos conjuntos son fáciles de distinguir, ya que no tienen ningún elemento en común. En otras palabras, los elementos de cada conjunto son completamente diferentes.

Ejemplo:

1. A = {x / x es un número par} y D = {x / x es un número impar}. Estos dos conjuntos son completamente diferentes, por lo tanto, son ajenos.
2. A = {1, 2, 6, 7} y B = {3, 4, 5, 8} ; son disyuntos

1.10.4. Conjuntos comparables:

Dos conjuntos A y B son comparables si:

$$A \subset B \quad \vee \quad B \subset A$$

Los conjuntos Ay B no serán comparables si:

$$A \not\subset B \quad \vee \quad B \not\subset A$$

Ejemplo:

1. Si A = {p, q, r, s} y B = {m, n, o, p, q, r, s}; donde A es comparable con B para que $A \subset B$
2. Si A = {7, 8, 9, 10, 11} y B = {6, 7, 9, 10}; entonces A y B no son comparables porque $A \not\subset B \quad \vee \quad B \not\subset A$

1.10.5. Conjuntos equivalentes:

Se dice que dos conjuntos cualesquiera, llamémosle A y C son equivalentes o iguales si contienen los mismos elementos.

Ejemplo:

1. A = {x / x es un número par menor o igual que 20}
   y C={2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}
   Entonces A = C, debido a que tienen los mismos elementos. La única diferencia es que A está expresado por comprensión y C está expresado por extensión

1.10.6. Conjunto potencia:

Dado un conjunto A, definimos el conjunto potencia de A, al conjunto formado por todos los subconjuntos de A. El conjunto potencia de A se denota por P(A) o por 2^A. De donde la notación P(A) o 2^A se lee: el conjunto potencia de A o el conjunto de partes de A.

Simbólicamente: $P(A) = \{x \,/\, x \subset A\}$

Se lee: el conjunto potencia de A, es igual, al conjunto de los elementos x, tales que, los x son subconjuntos de A.

Por lo tanto: $x \in P(A) \leftrightarrow x \subset A$

Además si el número de elementos de A es k, $k \in N$ el número de elementos de 2^A es 2^k.

Ejemplos:

1. $A = \{5, 4, 3\}$, entonces

   $2^A = \{\{5\},\{4\},\{3\},\{4\},\{5,4\},\{5, 3\},\{A\},\{\emptyset\}\}$

   Como observamos $n(A) = 3$ y $n(2^A) = 2^3 = 8$

1.10.7. Conjunto unitario:

Se llama conjunto unitario, al conjunto que consiste de un solo elemento.

Ejemplos:

1. $A = \{x \in R / x + 3 = 0\} = \{-3\}$
2. $A = \{x \in Z \,/\, 3 < x < 5\} = \{4\}$

1.11. EJERCICIOS DESARROLLADOS

1. Dado el conjuntos A = {a, {a}, ∅}. Indicar cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas.

a. {a} ∈ A

b. El conjunto ∅ ∈ A

c. {a, {a}} ∈ A

d. ∅ ∈ A

e. ∅ = {∅}

Solución:

Son verdaderas las letras a y d, la b no porque no existe conjunto vacío existe el conjunto A (al contrario), lo mismo pasa con la letra c y e no pertenecen a A

2. Señalar cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas:

a. ∅ = { }.

b. $A = \{x \in R / x^2 +1 = 0\}$ es un conjunto no vacío.

c. $B = \{x \in R / x^3 + 2x = 0\}$ es unitario.

d. El conjunto A = {-1, 1, 3, 5,..........} por comprensión es $A = \{x / x = 2n - 3, n \in Z+\}$.

e. Si $W = \{ x / x \in R, x^2 - 23 = 2 \}$, entonces $-5 \notin W$

Solución:

Las proposiciones verdaderas son las a, b y c

3. Determinar por extensión los siguientes conjuntos:

a. A = { x ∈ N / x - 1 < 5 }

b. C = { x ∈ Z / - 2 < x ≤ 3 }

c. M = { x / x es un pronombre personal en Inglés }

Solución:

a. A = { 5, 4, 3, 2, 1, 0 }

b. C = { -1, 0, 1, 2, 3 }

c. M = { I am, You are, She is, He is, It is, We are, You are, They are }

4. Determinar por comprensión los siguientes conjuntos:

a. A = { 4, 6, 8, 10 }

b. X = { 3, 5, 7, 9, ...}

c. Y = { 1, 4, 9, 16, 25, ...}

Solución:

a. A = { x / x es par ∧ 4 ≤ x ≤ 10 }

b. X = { x / x es impar ∧ x ≥ 3 }

c. Y = { x / x ∈ Z^+ ∧ x^2 }

5. Determinar por extensión los siguientes conjuntos:

A = { y / y ∈ N ; 5 < y ≤ 9 }

B = { 2x + 1 / x ∈ N ; 3 ≤ x < 6 }

C = { $\frac{1}{2x}$ / x ∈ N ; 2 ≤ x ≤ 4 }

Solución:

Sus elementos tiene la forma "y" y los valores que asume son los siguientes:

A = {6, 7,8, 9}

Los elementos del conjunto B tienen la forma de "2x + 1"; los valores que puede asumir x son 3, 4, 5 entonces reemplazando en "2x + 1" tenemos:

B = {7, 9, 11}

Y para los elementos del conjunto C tienen la forma de "$\frac{1}{2x}$"; los valores que puede asumir x son 2, 3, 4 entonces reemplazando en "$\frac{1}{2x}$" tenemos:

C = {1/4 , 1/6, 1/8}

6. Expresar los siguientes conjuntos por comprensión

a. P = {1, 4, 9, 16, …}

b. Q = {1/2, 1/4, 1/8, 1/16, … }

Solución:

P = {1, 4, 9, 16, …}; los cuadrados

$P = \{n^2 / n \in N\}$

$P = \{x / x = n^2 , n \in N\}$

Para Q = {1/2, 1/4, 1/8, 1/16, … }

$Q = \{ \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots\}$

$$Q = \{\frac{1}{2^n} \ / \, n \in N\}$$

$$Q = \{x/x = \frac{1}{2^n} \ / \, n \in N\}$$

7. Determinar por extensión los siguientes conjuntos:

A = {x ∈ *N* / x ≤ 3 ∨ 5 < *x* < 7}

B = {x / x^3 – 19x^2 - 36x + 1440 = 0 }

Solución:

A = {x ∈ *N* / 1, 2, 3 ∨ 6}

A = {1, 2, 3, 6 }

B = {x / x^3 – 19x^2 - 36x + 1440 = 0 }

	1	**-19**	**-36**	**1440**
12		12	-84	-1440
	1	-7	-120	0
- 8		-8	120	
15	1	-15	0	
		15		
	1	0		

Entonces los elementos son;

B = {x / -8, 12, 15}

8. Determinar por extensión los siguientes conjuntos:

$A = \{x^2 - 1 \,/\, x \in Z \wedge -1 \leq x \leq 3\}$

$B = \{3 - 5x \,/\, x \in Z \,;\, -2 \leq x < 5 \wedge 3 \leq x < 8\}$

Solución:

$$A = \{x^2 - 1 \,/\, x \in Z \wedge \underbrace{-1 \leq x \leq 3}_{-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3}\}$$

$A = \{-1, 0, 3, 8\}$

$$B = \{3 - 5x \,/\, x \in Z \,;\, \underbrace{-2 \leq x < 5}_{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4} \wedge \underbrace{3 \leq x < 8}_{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7}\}$$

3, 4

$B = \{-17, -12\}$

1. Determinar por extensión los siguientes conjuntos:

$A = \{x \in R \,/\, 2x^3 + x^2 + x - 1 = 0\}$

$B = \{x \in R \,/\, 64x^3 + 24x^2 - 6x - 1 = 0\}$

Solución

$A = \{x \in R \,/\, 2x^3 + x^2 + x - 1 = 0\}$

a) primera forma:

$$2\left(x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x\,(x^2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

Igualamos cada uno de ellos, entonces tenemos:

$x = \frac{1}{2}$; como dato de x, utilizamos Rufini para hallar los valores de "x" y así obtener los valores del conjunto A

$\frac{1}{2}$	2	1	1	-1
		1	1	1
	2	2	2	0

Nos damos cuenta que ya no se puede seguir resolviendo por el método de Rufini, como resulta una función de grado dos utilizamos completando cuadrados.

$$2x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = 0$$

$$(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = 0$$

$$(x + \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}$$

$$(x + \frac{1}{2}) = \sqrt{-\frac{3}{4}}$$

Observamos que no existe en los reales, una raíz de índice par: por lo tanto es un número complejo

Tenemos los elementos en forma de extensión

A = { $\frac{1}{2}$ }; porque el resto no es real, es complejo

Observación: otra manera para darnos cuenta que la proposición (ecuación de segundo grado) es compleja sin necesidad de resolver utilizamos la discriminante:

$\Delta = b^2 - 4ac$; si el resultado es menor que cero entonces es una proposición compleja no real; así ya no tendría caso resolver $2x^2 + 2x + 2 = 0$, porque el resultado sería un número complejo.

B = {x ∈ R / $64x^3 + 24x^2 - 6x - 1 = 0$}

$\frac{-1}{8}$	64	24	- 6	-1
		-8	-2	1
$\frac{-1}{2}$	64	16	- 8	
		-32	-8	
$\frac{1}{4}$	64	- 16	0	
		16		
	64			

B = { $\frac{-1}{8}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{4}$}

2. Si $A = \{x \in N / x^3 – 3x^2 - 6x + 8 = 0\}$ y

$B = \{ \frac{x+1}{2} / x \in Z, -4 < x \leq 3\}$. Determinar cuál de las relaciones se cumplen $A \subset B$, $B \subset A$, $A = B$

Solución:

$A = \{x \in N / x^3 – 3x^2 - 6x + 8 = 0\}$

	1	-3	-6	8
-2		-2	10	-8
	1	-5	4	0
1		1	-4	0
	1	-4	0	
4		4		
	1	0		

Pero como el conjunto A nos pide solo números Naturales, entonces tenemos los siguientes elementos

$A = \{1, 4\}$

$B = \{-1,0, 1, 2\}$.

En conclusión ninguna de las relaciones cumple.

1.12. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. **¿Cuáles de los siguientes conjuntos son vacíos, unitarios, finitos o infinitos?**
   a) A = { x / x es día de la semana}
   b) B = { vocales de la palabra vals}
   c) C = { 1, 3, 5, 7, 9, ...}
   d) D = { x / x es un habitante de la luna}
   e) E = { $x \in \mathbb{N}$ / $x < 15$}
   f) F = { $x \in \mathbb{N}$ / $5 < x < 5$ }
   g) G = { $x \in \mathbb{N}$ / $x > 15$}
   h) H = { $x \in \mathbb{N}$ / $3x = 6$}
   i) I = { x / x es presidente del Mar Mediterráneo}
   j) J = { x / x es el número de pelos de todos los eslovacos que viven actualmente}

2. **Escriba por Extensión los siguientes conjuntos:**
   $A = \{n \in N / 5n + 1 \leq 21\}$, $B = \{x \in R / x^2 = x\}$
   $C = \{n \in N / n < 11 \wedge$ n es múltiplo de 2}
   $D = \{x \in R / x < 0 \wedge 2x - 5 > 0\}$

3. De entre los siguientes conjuntos, señala los que son el conjunto vacío:

a) $A=\{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 = 0\}$

b) $B=\{x \in \mathbb{R} / x < 4 \vee x > 6\}$

c) $C=\{x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 1 = 0\}$

d) $D=\{x \in \mathbb{R} / x + 5 = 5\}$

e) $E=\{x \in \mathbb{R} / x < 4 \wedge x > 6\}$

f) $F=\{x \in \mathbb{R} / x > 4 \wedge x$ no es mayor que $6\}$

4. ¿Cuántos de los siguientes conjuntos son vacíos?

a) $A=\{x / x$ es un entero par y $x^2 = 9\}$

b) $B=\{x \in Z / x + 18 = 18\}$

c) $C=\{x \in Z^+ / x^2 - 3x - 4 = 0\}$

d) $D=\{x \in Z^+ / x < 0\}$

e) $B=\{x \in Z / 6x^2 + 5x - 4 = 0\}$

5. Sean los conjuntos $A = \{r, s, t, u, v, w\}$, $B = \{u, v, w, x, y, z\}$, $C = \{s, u, y, z\}$, $D = \{u, v\}$, $E = \{s, u\}$ y $F = \{s\}$. Determina en cada caso, con las informaciones dadas y con ayuda de un diagrama de Venn, cuál de los conjuntos dados es X:

a. $X \subset A$ y $X \subset B$;

b. $X \not\subset B$ y $X \subset C$;

c. $X \not\subset A$ y $X \not\subset C$ y

d. $X \subset B$ y $X \not\subset C$

6. Determinar por extensión los siguientes conjuntos.

$A = \{x \,/\, x^3 - 19x^2 - 36x + 1440 = 0\}$

$B = \{x \in N \,/ 6x^3 - 31x^2 + 3x + 10 = 0\}$

$C = \{x \in R \,/\, (x^2 + 16x)^2 = 17^2\}$

D= {x /x4 + x3 - 6x2 - x + 5 = 0}

E= {x /x4 + 2x3 - 31x2 - 32x + 60 = 0}

F= {x /64x3 + 24x2 - 6x - 1 = 0}

7. Considere el Universo U = {− 3,− 2,−1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 } Escriba por extensión los siguientes conjuntos de U

a. $A = \{ x \in U \,/\, x^2 = 9 \}$

b. B = {x ∈ U /log2 (x) =1}

c. $C = \{x \in U \,/ 1 - 2x > -4 \}$

8. Sea **U = {** $x \in N \,/\, 1 \leq x \leq 5$ **}, A = { x ∈ U / x es par}**
$B = \{x \in U \,/\, x \text{ es impar}\}$ y $C = \{x \in A \,/\, x = 2^n, n \in U\} \cup \{12\}$.
Si $D = \{x \in U \,/\, x \in U \rightarrow x \in B\} \cap \{x \in A \,/\, x$ es múltiplo de $4\}$ ¿Cuántos subconjuntos de C contienen a D?

9. Sean A = {1, 2, 3, 4, 5,6 , 7, 8,9} , B = {2, 4, 6,8}, C = {1, 3,5, 7, 9}, D = {3, 4,5}, E = {3,5} y F = {s}. Determina en cada caso, con las informaciones dadas y con ayuda de un diagrama de Venn, cuál de los conjuntos dados es X:

a) X y B son disjuntos;

b) $X \subset D$ y $X \not\subset C$;

c) $X \subset A$ y $X \not\subset C$ y

d) $X \subset C$ y $X \not\subset A$

10. U = {1, 2, 3, 4, 5, 6 , 7, 8, 9}, A = {2, 4, 6, 8}, B = {1, 3, 5, 7, 9} y C = {3, 4, 5}. Al hallar un subconjunto x de U tal que $x \subset C$, $x \not\subset A$, $x \not\subset B$. Cuantas soluciones existe.

11. Consideremos los conjuntos $A=\{x \in \mathbb{N} / 2 \leq x \leq 9\}$, B = {2,4 ,6 ,8}, C = {3, 5,7}, D = {2,4} y E = {1,3}. Indica en cada caso cuál de estos conjuntos puede ser el conjunto X:

a. $X \subset A$ y $X \subset B$

b. $X \not\subset B$ y $X \not\subset E$

c. $X \not\subset C$ y $X \subset D$

d. $X \not\subset A$ y $X \subset E$

e. $X \subset A$ y $X \subset E$

12. Se consideran los conjuntos $A = \{2,3, 4\}$,

$B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 4 \text{ es positivo}\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 6x + 8 = 0\}$ y

$D = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ es par}\}$. Establece todas las posibles relaciones de inclusión entre dichos conjuntos.

13. Dados los siguientes conjuntos $A = \{7x + 2 / x \in Z\}$,

$B = \{7x - 26 / x \in Z\}$, $C = \{4x + 1 / x \in Z\}$ y

$D = \{2x + 1 / x \in Z\}$. Analizar y justificar debidamente su conclusión en los siguientes casos:

a) $A = B$

b) $C = D$

14. Sean A y B subconjuntos de un conjunto U:

a) De un subconjunto H de U, se sabe que $A \subset H$, $B \subset H$ y $H \subset A \cup B$. ¿Qué se puede decir del conjunto H?

b) De un subconjunto K de U se sabe que $K \subset A$, $K \subset B$ y $A \cap B \subset K$. ¿Qué se puede decir del conjunto K?

15. Dados los conjuntos A y B son unitarios

$A = \{90, a.b\}$, $B = \{a + b, 23\}$, hallar la diferencia entre a y b

1.13. CUANTIFICADORES Y CONJUNTOS

Una función proposicional P(x), relacionada con una proposición cuantificacional, se convierte en una proposición lógica (V o F) de acuerdo con el valor que asume la variable x.

A todo enunciado de la forma P(x) se denomina función proposicional la cual tiene la propiedad de convertirse en una proposición al ser sustituido la variable x por una constante "a".

Nota: Al conjunto de todos los valores convenidos para la variable x se denomina dominio de la variable.

Ejemplo:

$P(x) = x + 2 \quad / P(x) < 2, x \in Z$

Si $x = -2$ P(x) es verdadero

Si $x = 1$ P(x) es falso

Por lo tanto P(x) es una función proposicional.

Por ejemplo:

La función P(x): $x^2 - 4 = 0$ es una función preposicional que se convierte en verdadera si $x = 2$ ó $x = -2$, y es falsa cuando x toma otros valores.

Ahora consideremos un conjunto cualquiera A, por ejemplo:

$A = \{-2, 1, 2, -3, 0\}$

La proposición:

"Existe por lo menos un $x \in A$, tal que se verifica P(x)" o equivalentemente: "$\exists\ x \in A$ / P(x)", es verdadera, pues existe

$x = -2 \in A$, tal que: $x^2 - 4 = 0$.

Así mismo, la proposición:

"Para todo $x \in A$, se verifica P(x)" o equivalentemente "$\forall\ x \in A$ / P(x)", es falsa, pues no todo elemento de A, verifica

$x^2 - 4 = 0$, basta tomar $x = 1 \in A$ / 12 - 4 es diferente de 0. A la frase: "Existe un", "Para algún" o "Algunos", etc. que denota una parte de un universo, se llama cuantificador existencial y se denota por $\exists$; mientras que a la frase: "Para todo", "Para cada" o "Para cualquier", etc. que denota la totalidad de objetos, se llama cuantificador universal y se denota por $\forall$.

1.13.1 Cuantificadores Existenciales y Universales

Se ha visto un método que nos permite que a partir de una función proposicional P(x) se pueda obtener proposiciones, sin embargo se tiene otro método completamente distinto que permite obtener proposiciones a partir de una función proposicional, dicho método es llamado cuantificadores. Si a cada enunciado abierto le anteponemos la expresión "para todo" o la expresión "existe" estaremos obteniendo nuevas proposiciones cuantificadas Universalmente o Existencialmente respectivamente.

Observaciones:

a) Negar que existe un $x \in A$, tal que se verifica P(x); equivale a decir que: Ningún $x \in A$, verifica P(x), o que: Todo x, no verifica P(x); simbólicamente:
$\sim [\exists\, x \in A \,/\, P(x)] \Leftrightarrow \forall\, x \in A \,/ \sim P(x)$.

b) Negar que para todo $x \in A$, verifica P(x), equivale a decir que: Para algunos $x \in A$, no se verifica P(x); simbólicamente:
$\sim [\forall\, x \in A \,/\, P(x)] \Leftrightarrow \exists\, x \in A \,/ \sim P(x)$

Ejemplo 01: Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, siendo el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

a. $\forall\, x \in A \,/\, x^2 - 5x + 6 = 0$.

b. $\exists\, x \in A \,/\, x^3 + x^2 - 2x = 0$.

c. $\forall\, x \in A, \exists\, y \in A \,/\, x + y \leq 4$

Solución:

a. Es falsa, pues $x^2 - 4x + 5 = 0$ se cumple sólo para $x = 1$, y $x = 5$ y no para todos los demás elementos de A.

b. Es verdadera, puesto que la ecuación $x^3 + x^2 - 2x = 0$ tiene dos soluciones $x = 0$, y $x = 1$ en el conjunto A; bastaba que hubiera una.

c. Es falsa, pues para $5 \in A$ no existe ningún valor $y \in A$ / $5 + y \leq 4$.

$\forall x \in A$	$\exists y \in A$ /	$x + y \leq 4$
0	2	$0 + 2 \leq 4$
1	3	$1 + 3 \leq 4$
2	0	$2 + 0 \leq 4$
3	1	$3 + 1 \leq 4$
4	0	$4 + 0 \leq 4$
5	No existe	No se cumple

Ejemplo 02: Determinar el valor de verdad y negar las siguientes proposiciones; dado el conjunto $B = \{x / x \in Z, x \leq 4\}$.

a. $\forall x \in B / x - 1 < 2$.

b. $\forall x \in B, \exists y \in B / x^2 + y^2 \geq 8$.

c. $\exists x \in B, \exists y \in B / x - y = 0$

Solución:

a. Falsa, pues para x = 3, y para x = 4 no se satisface la inecuación, burlando el cuantificador ∀. Por otro lado, su negación es:

$\sim [\forall\, x \in B \,/\, x - 1 < 2] \Leftrightarrow \exists\, x \in B \,/\, x - 1 \geq 2$…. (V)

b. Verdadera.

$\forall\, x \in B$	$\exists\, y \in B$ /	$x^2 + y^2 \geq 8$
1	3	$1^2 + 3^2 \geq 8$
2	2	$2^2 + 2^2 \geq 8$
3	1	$3^2 + 1^2 \geq 8$
4	1	$4^2 + 1^2 \geq 8$

Su negación es:

$\sim [\forall\, x \in B, \exists\, y \in B \,/\, x^2 + y^2 \geq 8] \Leftrightarrow$

$\exists\, x \in B, \;\forall\, y \in B \,/\, x^2 + y^2 < 8$....(V)

c. Verdadera.

$\forall x \in B$	$\exists y \in B$	/ $x - y = 0$
1	1	$1 - 1 = 0$
2	2	$2 - 2 = 0$
3	3	$3 - 3 = 0$
4	4	$4 - 4 = 0$

Su negación es:

$\sim [\exists\, x \in B, \exists\, y \in B \,/\, x - y = 0] \Leftrightarrow$

$\forall\, x \in B, \forall\, y \in B \,/\, x - y \neq 0$ ....(F)

1.14. OPERACIONES CON CONJUNTOS

Así como pueden definirse diversas operaciones entre números, también existen operaciones entre conjuntos. El resultado de una operación entre conjuntos es a su vez un conjunto. Fijemos un conjunto universal U y consideremos todos los subconjuntos de U. Entre estos conjuntos están definidas las operaciones de unión, intersección y diferencia. Además, para cada conjunto se define el complemento. El resultado de cada una de estas operaciones es un subconjunto de U.

A. La Unión de Conjuntos (A U B)

Sean A y B dos conjuntos.

La unión A ∪ B de A con B es el conjunto cuyos elementos pertenecen a A o pertenecen a B. Por comprensión, la unión entre los conjuntos A y B se define así:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Gráficamente:

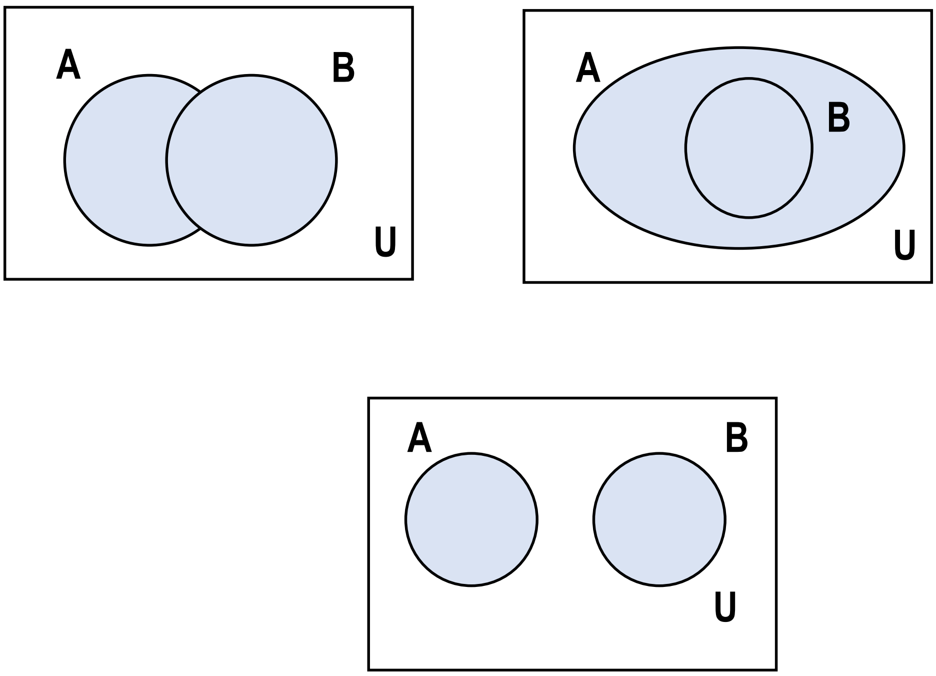


Figura 1. La unión de los conjuntos A y B

En particular, A y B son subconjuntos de A ∪ B, pues todos los elementos de A y todos los elementos de B pertenecen a A ∪ B. En un diagrama de Venn representamos la unión de dos conjuntos sombreando el área que Cubren ambos conjuntos (ver Figura 1).

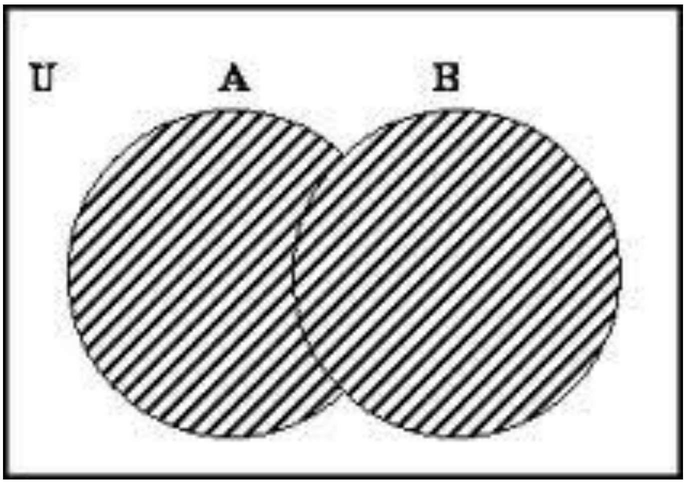


Figura 2. La unión de los conjuntos A y B

Ejemplos:

1. Si A = {x | x es múltiplo de 5} y
   B = {x | x es múltiplo de 10}, entonces
   A ∪ B = {x | x es múltiplo de 5},
   Dado que todo número múltiplo de 10 es también múltiplo de 5. En este caso, B ⊆ A.

2. Si A = $\{x \in N \ / \ 3 \leq x < 7\}$ y B = $\{x \in Z \ / \ -2 < x \leq 5\}$
   Calcular : $A \cup B$

Solución:

A = { 3, 4, 5,6}, B = {-1, 0, 1, 2, 3, 4,5}

$A \cup B$ = {-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}

3. Si A = {1, 4, 9} y B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},

Solución

A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

4. Sea $A = \{x \in R \,/\, x^2 - 1 = 0\}$, $B = \{x \in R \,/\, x^2 + 3 = 0\}$ y M = R.

Hallar: (a) A ⋃ B; (b) M ⋃ B; (c) A ⋃ M

Solución:

A = {-1, 1}, B = ∅, M = R;

Luego: $A \cup B = A \cup \varnothing = \{x \,/\, x \in A \vee x \in \varnothing\}$ pero no existe $x \in \varnothing$.

Entonces:

a. $A \cup B = \{-1, 1\}$, es decir $A \cup \varnothing = A, \forall A$.

b. $M \cup B = R$

c. $A \cup M = \{ x \,/\, x \in A \vee x \in M \} \} = R$.

Observación:

- La unión de un conjunto A con el conjunto vacío es el mismo conjunto A, puesto que ∅ no tiene elementos:

$$A \cup \emptyset = A.$$

- La unión de un conjunto A con A es el mismo conjunto A:

$$A \cup A = A.$$

A.1. Propiedades de la Unión de Conjuntos

1. Idempotencia: $A \cup A = A$

2. Identidad: $A \cup \emptyset = A$; $A \cup U = U$

3. Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$

4. Asociativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

5. Adición: $A \subseteq (A \cup B)$; $B \subseteq (A \cup B)$

6. $B \subset A \cup B$

7. $A \subset A \cup B$

8. $A \subset C \wedge B \subset C \rightarrow A \cup B \subset C$

9. A U (B U C) = (A U B) U (A U C)

A.2. Demostraciones de algunas propiedades

a) Demostración que: (A U A) ⊂ A

En efecto:

1. Sea x ∈ (A U A) → x ∈ A ∨ x ∈ A (Def. U)
2. Si hacemos p = x ∈ A, entonces: p ∨ p ≡ p (Idemp.)
3. Luego, x ∈ (A U A) → x ∈ A
4. Por lo tanto: A ⊂ (A U A) (Def. ⊂)

b) Demostraremos que: A⊂ (A U A)

En efecto:

1. Sea x ∈ A

2. Se sigue entonces que x ∈ A ∨ x ∈ A

3. Luego: x ∈ A → x ∈ (A U A)

4. Por lo tanto: A ⊂ (A U A)

c) Demostraremos que: A U ∅ = A

Hay que demostrar que todo elemento de A U ∅ = A es elemento de x (demostrar que x U ∅ ⊂ x) y que, recíprocamente, todo elemento de x es elemento de x U ∅ (demostrar que x ⊂ x U ∅). Si, a ∈ x U ∅, entonces a ∈ x o a x ∅, de lo que solo puede ser a ∈ x . Recíprocamente, si a ∈ x, entonces a ∈ x U ∅ . Por tanto x U ∅ = x.

d) Demostrar la propiedad asociativa de la unión de conjuntos, es decir $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ para cualquier terna de conjuntos A, B, C

Solución:

Quedará demostrada la igualdad si demostramos los contenidos:

$(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$… (1)
$A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$… (2)

Sea $x \in (A \cup B) \cup C$. Esto significa $x \in A \cup B$ o $x \in C$. Si ocurre lo primero, será $x \in A$ o $x \in B$. Si $x \in A$, será $x \in A \cup (B \cup C)$; si $x \in B$ será $x \in B \cup C$ y por tanto $x \in A \cup (B \cup C)$. Por último, si $x \in C$, será $x \in B \cup C$ y por tanto $x \in A \cup (B \cup C)$. Hemos demostrado (1).

Sea $x \in A \cup (B \cup C)$. Esto significa $x \in A$ o $x \in B \cup C$. Si ocurre lo primero, será $x \in A \cup B$ y por tanto $x \in (A \cup B) \cup C$. Si $x \in B \cup C$, será $x \in B$ o $x \in C$. Si $x \in B$, será $x \in A \cup$

B y por tanto x ∈ (A ∪ B) ∪ C; si x ∈ C será x ∈ (A ∪ B) ∪ C. Hemos demostrado (2).

B. Intersección de Conjuntos (A ∩ B):

Sean A y B dos conjuntos construidos a partir de U. Si sobre U se aplica la función proposicional "x ∈ A ∧ x ∈ B", se obtiene un nuevo conjunto llamado la intersección de A con B, es decir: Es el conjunto de todos los elementos comunes al conjunto A y B

Forma simbólica: $A \cap B = \{\ \in U / x \in A \ \wedge \ x \in B \}$

Gráficamente: La parte sombreada del diagrama es una representación gráfica de la intercesión

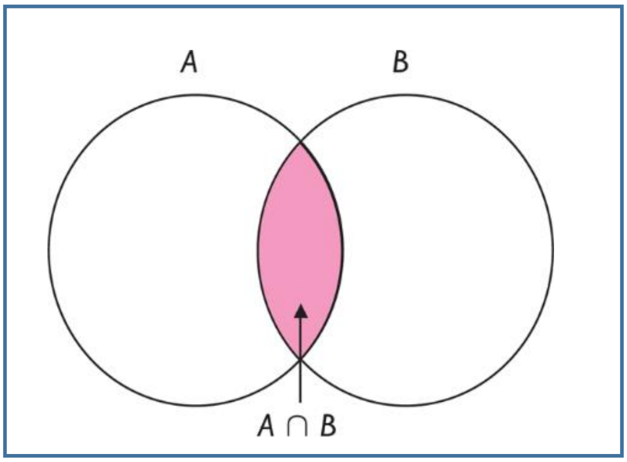


Figura 3. Intersección de los conjuntos A y B

Otros gráficos:

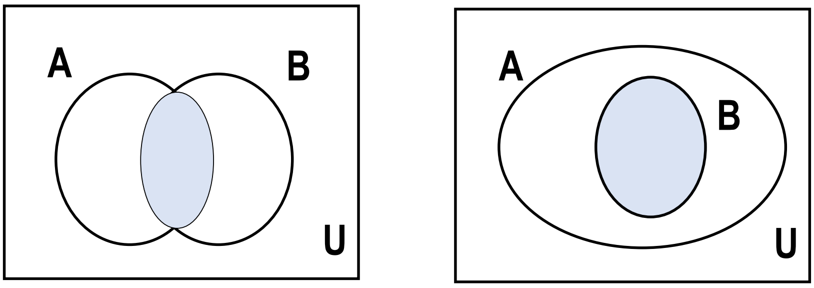


Figura 4. Intersección de los conjuntos A y B; donde A Y B no son disyuntos

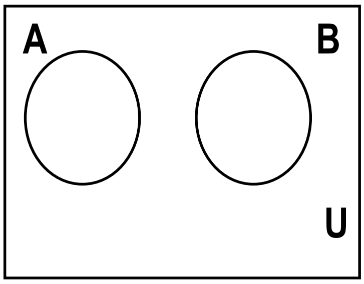


Figura 5. $A \cap B = \emptyset$; donde A Y B son disjuntos

Observación:

$(A \cap B) \subset A$ y $(A \cap B) \subset B$

Conjuntos Disjuntos: A y B son disjuntos si $A \cap B = \emptyset$.

Ejemplos:

1. Si $A = \{x \; \varepsilon \; N \; / \; x \text{ es múltiplo de } 3\}$ y

   $B = \{x \; \varepsilon \; N \; / \; x \text{ es múltiplo de } 5\}$. Calcular: $A \cap B$

   Solución:

A = { 3, 6, 9, 12, 15………}

B = {5, 10, 15, 20, 25………}

$A \cap B = \{15, 30, 45, \ldots\ldots\ldots..\}$

2. Siendo A = {3, 5, a}, B = {a, b, c, d}, C = {b, c}. Hallar:

   a. $A \cap B$ b. $B \cap C$ c. $A \cap C$

   Representar gráficamente cada caso.

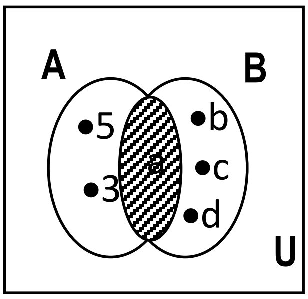
   Solución:

   $A \cap B = \{x /\ x / x \in A \wedge x \in B\} = \{a\}$

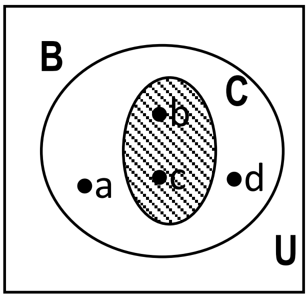
   $B \cap C = \{x / x \in B \wedge x \in C\} = \{b, c\}$

   $A \cap C = \{x / x \in A \wedge x \in C\} = \varnothing$

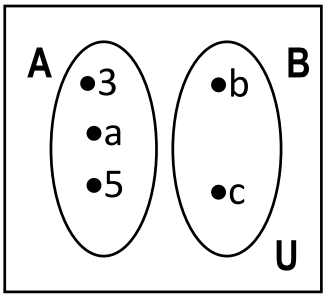
   Concluimos:



a) $A \cap B$



b) $B \cap C$



c) $A \cap C$

Observación: Si $X \subset Y$, entonces $X \cap Y = X$

3. Sean $U = N$, $A = \{n / n \leq 11\}$, $P = \{n \mid n \text{ es primo}\}$ y $B = \{n / n \text{ es impar y } n \leq 20\}$, hallar: $A \cap B$, $A \cap P$, $B \cap P$

Solución:

$A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

$A \cap P = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

$B \cap P = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

4. Si consideramos los intervalos $[0, 5>$ y $<3, 6]$, entonces; Hallar: $[0, 5> \cup <3, 6]$ y $[0, 5> \cap <3, 6]$

Solución:

$[0, 5< \cup <3, 6] = [0, 6]$

$[0, 5> \cap <3, 6] = (3, 5)$.

Observación:

- Si A es un subconjunto de B, esto es $A \subseteq B$, entonces $A \cap B = A$.
- En particular, $A \cap A = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$.

5. La intersección del intervalo $<0, 1>$ con el conjunto $\{0, 1\}$ no tiene elementos, es decir, es el conjunto vacío: $<0, 1> \cap \{0, 1\} = \emptyset$, es decir que $<0, 1>$ y $\{0, 1\}$ son conjuntos disjuntos.

B.1. Propiedades de la Intersección de Conjuntos

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$
3. $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cap \mathrm{U} = \mathrm{A}$
5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
6. $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{A}$
7. $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{B}$
8. $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \rightarrow A \cap \mathrm{C} \subset \mathrm{B} \cap \mathrm{C}, \quad \forall C$
9. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
10. $A \cap (B \cup C) = (A \cap \mathrm{B}) \cup (A \cap C)$
11. $Si\ A \subset \mathrm{C}$ y $\mathrm{B} \subset \mathrm{D} \rightarrow \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{C} \cap \mathrm{D}$
12. $Si\ \mathrm{A} \subset \mathrm{B} \rightarrow A \cap B = A$

B. 2. Demostraciones de algunas propiedades

1. $\boldsymbol{A \cap B = B \cap A}$

   Solución:

   Sean A y B conjuntos arbitrarios. Sea x ∈ A ∩ B. Esto significa que x ∈ A y x ∈ B lo cual implica que x ∈ B y x ∈ A, es decir x ∈ B ∩ A. Hemos demostrado A ∩ B ⊂ B ∩ A.

Sea $x \in B \cap A$. Esto significa que $x \in B$ y $x \in A$ lo cual implica que $x \in A$ y $x \in B$, es decir $x \in A \cap B$. Hemos demostrado $B \cap A \subset A \cap B$.

Podemos pues concluir que $A \cap B = B \cap A$.

2. **Demostración de las propiedades idempotentes de la unión y de la intersección: $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$**

Solución:

Sea A conjunto arbitrarios. Si $x \in A \cup A$, será $x \in A$ o $x \in A$, y en ambos casos $x \in A$. Si $x \in A$, en virtud de la definición de unión, $x \in A \cup A$. Podemos pues concluir que $A \cup A = A$.

Si $x \in A \cap A$, será $x \in A$ y $x \in A$, y por tanto, $x \in A$. Si $x \in A$, en virtud de la definición de intersección, $x \in A \cap A$. Podemos pues concluir que $A \cap A = A$.

3. **Demostrar las propiedades del elemento identidad para la unión e intersección $A \cup \emptyset = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$**

Solución:

Si $x \in A \cup \emptyset$ entonces $x \in A$ o $x \in \emptyset$. Dado que el conjunto vacío no tiene elementos, necesariamente $x \in A$. Si x

$\in A$, por la definición de unión, se cumple $x \in A \cup \emptyset$. Es decir, $A \cup \emptyset = A$.

Un elemento x pertenece a $A \cap \emptyset$, si y sólo si $x \in A$ y $x \in \emptyset$. Ningún elemento x cumple las dos condiciones anteriores, por tanto $A \cap \emptyset = \emptyset$.

4. **Demostrar la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para conjuntos A, B, C arbitrarios.**

Solución:

(a) Veamos qué $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. En efecto, $x \in A \cap (B \cup C)$ implica $x \in A$ y $x \in B \cup C$, es decir o bien $x \in A$ y $x \in B$ o bien $x \in A$ y $x \in C$. En el primer caso $x \in A \cap B$ y en el segundo $x \in A \cap C$. En ambos casos, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(b) Veamos que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$. En efecto, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ implica $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$. En el primer caso, $x \in A$ y $x \in B$, por tanto $x \in A$ y $x \in B \cup C$ lo cual implica $x \in A \cap (B \cup C)$. En el segundo caso, $x \in A$ y $x \in C$, por tanto $x \in A$ y $x \in B \cup C$ lo cual implica también $x \in A \cap (B \cup C)$.

5. Probar que: $A \cap B \subset A$

1. $\forall\, x \in (A \cap B)$

2 $\underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in B}_{p}$

3. $[\underbrace{x \in A}_{p} \wedge \underbrace{x \in B}_{p}] \Longrightarrow \underbrace{x \in A}_{p}$ (Tautología)

4. Por 1 y 3: $A \cap B \subset A$

6. Probar: $A \subset B \Longrightarrow A \cap C \subset B \cap C, \quad \forall\, C$

1. Suponer: $\forall\; x \in (A \cap C)$

2. $x \in A \wedge x \in C$

3. Como $A \subset B$ entonces: $\forall\; x \in A \Longrightarrow x \in B$

4. De 3 en 2: $x \in B \wedge x \in C$

5. $x \in (B \cap C)$

6. Por 1 y 5: $A \cap C \subset B \cap C$

7. Probar: ***Si A*** $\subset$ **C y B** $\subset$ **D** $\Longrightarrow$ **A** $\cap$ **B** $\subset$ **C** $\cap$ **D**

1. $\forall \ x \in (A \cap B)$

2. $x \in A \wedge x \in B$

3. Pero: $A \subset C$, entonces $\forall \ x \in A \Longrightarrow x \in C$

4. Como: $B \subset D$, entonces $\forall \ x \in B \Longrightarrow x \in D$

5. De 3 y 4 en 2 $\Longrightarrow x \in C \wedge x \in D$

6. $\Longrightarrow x \in (C \cap D)$

7. Por 1 y 6: $A \cap B \subset C \cap D$

C. La Diferencia de Conjuntos (A - B):

La Diferencia de los conjuntos A y B, en ese orden, denotado por A – B, es el conjunto formado por todos los elementos de A que no pertenecen a B. También se le conoce como complemento relativo entre A y B.

Forma simbólica: $\mathbf{A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}}$

Se lee: “A diferencia B” o “A menos B”

Gráficamente:

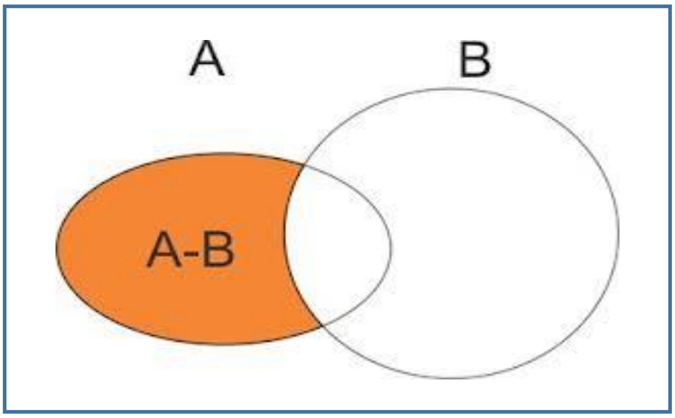


Figura 6. Diferencia A - B

Otros gráficos de la diferencia:

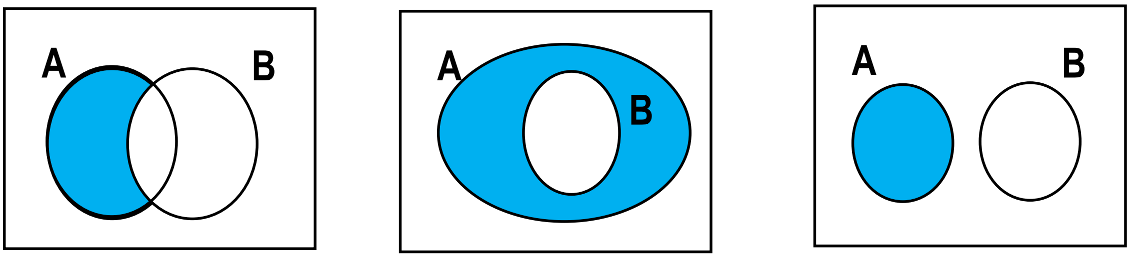


Figura 7. Gráficos de Diferencia A - B

Observación: A-B ≠ B-A (No cumple con la propiedad conmutativa excepto cuando A=B).

Ejemplos:

1. Si A = {x ε N / x es múltiplo de 5} y

B = {x ε N / x es múltiplo de 7}

Calcular: $A - B$

A = { 5,10,15,20,25,30,35……… } ,

B = {7, 14, 21, 28, 35,42………}

$A - B$ = {5, 10, 15, 20, 25, 30, 40,45,………..}

2. Tenemos que: A= {4n / n ε Z^+} y B = {2n / n ε Z^+}

Hallar: $A - B$ y B – A

Solución:

$A - B = \emptyset$

B – A = {2, 6, 10, 14, 18, 22………}

C.1. Propiedades de la Diferencia de Conjuntos

1. $A - A = \emptyset$
2. $\emptyset - A = \emptyset$
3. $A - \emptyset = A$
4. $A - B \neq B - A$
5. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
6. $A \subset B \rightarrow A - C \subset B - C, \quad \forall \boldsymbol{C}$
7. $(A - B) \subset A$
8. $A \subset B \leftrightarrow A - B = \emptyset$
9. $B \cap (A - B) = \emptyset$
10. $A - B = (A \cup B) - B$

    $= A - (A \cap B)$

C. 2. Demostraciones de algunas propiedades

1. **Probar que:** $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

Por probarse dos inclusiones:

$(A \cap B) - (A \cap C) \subset A \cap (B - C) \quad \wedge$

$A \cap (B - C) \subset (A \cap B) - (A \cap C)$

Probaremos que: $[(A \cap B) - (A \cap C)] \subset A \cap (B - C)$

1. $\forall\, x \in [(A \cap B) - (A \cap C)]$

2. $x \in (A \cap B) \quad \wedge \quad x \notin (A \cap C)]$

3. $x \in (A \cap B) \ \wedge \ [x \notin A \ \vee x \notin C \ ]$

4. $x \in (A \cap B) \ \wedge \ [x \in A' \vee x \in C']$

5. $[x \in (A \cap B) \ \wedge \ x \in A'] \vee [x \in (A \cap B) \ \wedge \ x \in C']$

6. $[x \in A \ \wedge \ x \in B \ \wedge \ x \in A'] \vee [x \in (A \cap B) \ \wedge \ x \in C']$

7. $[\underbrace{x \in B \wedge \underbrace{(x \in A \ \wedge \ x \in A')}_{F}}_{F}] \ \vee \ [x \in (A \cap B) \ \wedge \ x \in C']$

8. $x \in (A \cap B) \ \wedge \ x \in C'$

9. $x \in A \ \wedge \ [\ x \in B \ \wedge \ x \in C' \ ]$

10. $x \in A \ \wedge \ [\ x \in (B - C)]$

11. $x \in [A \cap (B - C)]$

12. Por 1 y 11 $[(A \cap B) - (A \cap C)] \subset A \cap (B - C)$

Ahora probaremos que: $A \cap (B - C) \subset (A \cap B) - (A \cap C)$

13. $\forall x \in [A \cap (B - C)]$

14. $x \in A \wedge x \in (B - C)$

15. $x \in A \wedge [x \in B \wedge x \notin C]$

16. $[x \in A \wedge x \in B] \wedge x \notin C$

17. $x \in (A \cap B) \wedge x \notin C$

Aquí aplicamos la tautología: $F \vee P \equiv P$, en particular para $F \equiv x \in A \wedge x \notin A$

18. $\underbrace{\qquad F \qquad} \vee \overbrace{[x \in (A \cap B) \wedge x \notin C']}^{P}$

19. $[x \in A \wedge x \notin A] \vee [x \in (A \cap B) \wedge x \notin C']$, aplicar: $q \wedge F \equiv F$ siendo q: $x \in B$

20. $(\overbrace{x \in B}^{q} \wedge \overbrace{[x \in A \wedge x \notin A]}^{F}) \vee [x \in (A \cap B) \wedge x \notin C']$

21. $([x \in A \wedge x \in B] \wedge x \in A') \vee [x \in (A \cap B) \wedge x \notin C']$

22. $[x \in \underline{(A \cap B)} \wedge x \in A'] \vee [x \in \underline{(A \cap B)} \wedge x \notin C']$

23. $x \in \underline{(A \cap B)} \wedge [x \in A' \vee x \notin C']$... P. distributiva.

24. $x \in (A \cap B) \wedge [x \notin A \vee x \notin C]$

25. $x \in (A \cap B) \quad \wedge \; x \notin (A \cap C)$

26. $x \in [\,(A \cap B) - (A \cap C)]$

27. Por 13 y 26 $[A \cap (B - C)] \subset [(A \cap B) - (A \cap C)]$

28. Por 12 y 27 $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

2. Probar que: $A \subset B \leftrightarrow A - B = \emptyset$ es igual e decir:

$$\mathbf{A \subset B \leftrightarrow A \cap B' = \emptyset}$$

Demostración:

Teniendo como hipótesis $A \subset B$, deseamos saber cómo es $A \cap B'$

Tenemos:

1. Por hipótesis: $A \subset B$

2. Si $A \subset B \rightarrow A \cap B = A$ … (p. de $\cap$ $A \subset B \leftrightarrow A \cap B = A$)

3. Reemplazar $A = A \cap B$ en $A \cap B'$ así obtendremos:

$$A \cap B' = (A \cap B) \cap B' = A \cap \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset}$$

$$= A \cap \emptyset = \emptyset$$

4. $A \cap B' = \emptyset$

5. Se ha demostrado que: $A \subset B$ implica $A \subset B' = \emptyset$

3. Probar si: $A \subset B \rightarrow (A - C) \subset (B - C)$, $\forall C$

1. Por hipótesis $A \subset B$

2. Debe probar: Si $x \in (A - C)$ implica que $x \in (B - C)$

Vemos:

3. Si $x \in (A - C) \rightarrow x \in A \wedge x \notin C$

4. Como $A \subset B \rightarrow x \in B \wedge x \notin C, \ \forall x \in A$

5. $\rightarrow x \in (B - C)$

6. Por 3 y 5 se cumple: $(A - C) \subset (B - C)$

4. Probar que: $B \cap (A - B) = \emptyset$

Veamos:

1. $B \cap (A - B) = B \cap (A \cap B')$
2. $B \cap (A - B) = B \cap (B' \cap A)$
3. $B \cap (A - B) = \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset} \cap A$
4. $B \cap (A - B) = \emptyset \cap A$
5. $B \cap (A - B) = \emptyset$

D. Complemento de un Conjunto (C_A):

El complemento del conjunto A respecto al conjunto universal U, es el conjunto A' formado por todos los elementos de U que no están en A. Es decir: El complemento de un conjunto A es el conjunto de elementos que no pertenecen al conjunto A.

Forma simbólica: $A' = C_A = U - A = \{\, x / x \in U \;\wedge\; x \notin A \,\}$

Gráficamente: La parte sombreada del siguiente diagrama es una representación gráfica del complemento de A.

Figura 8. Gráfico de complemento de C_A

En conclusión: En otras palabras, el complemento de A es el conjunto formado por los $x \notin A$, esto es:

A' = U – A. Gráficamente:

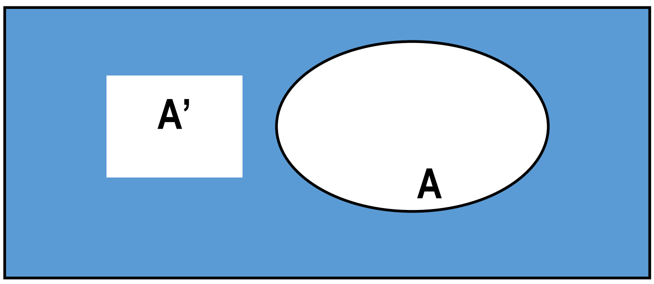


Figura 9. Gráfico de complemento de C_A

Notaciones: **C_A , A' , A°**

Ejemplos:

1. U = {1,2,3,4,5,9 } si A = {X^2 / x ∈ U } . Calcular : C_A

Solución:

A = { 1, 4, 9, 16, 25, 81}

C_A = { 2,3,5}

2. Sea U = {x ∈ Z / 0 ≤ x < 11} y A = {x ∈ Z / 3 < x ≤ 7}

Calcular: C_A

Solución: C_A = {0, 1, 2, 3, 8, 9, 10}

3. Si U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 } y sean los subconjuntos:

P = { 2x / x ∈ U}

Q = { x ∈ U / $(x^2 - 4)(x^2 - 7x + 12) = 0$}

R = { x ∈ U / $9^{x^2-3} = 9$}

Calcular: P'; Q'; R'; $(P \cup Q)'$; $(P \cap Q)'$; $(Q \cup R)'$

Solución;

P = { 2, 4, 6, 8, 10, 12}

Q = { 2, 3, 4}

R = { 2 }

Tenemos:

$P' = \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

$Q' = \{ 1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

$R' = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$(P \cup Q)' = \{1, 5, 7, 9, 11\}$

$(P \cap Q)' = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$(Q \cup R)' = \{1, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

D.1. Propiedades de la Diferencia de Conjuntos

1. $(A\ ) = A$
2. $A \cup A' = U$
3. $A \cap A' = \emptyset$
4. $U' = \emptyset$
5. $A - B = A \cap B'$
6. $A \subset B \rightarrow B' \subset A'$

D. 2. Demostraciones de algunas propiedades

1. Demostrar que $A - B = A \cap B'$

Solución: $A - B = A \cap B'$ equivale a demostrar que:

I) $(A - B) \subset (A \cap B')$

II) $(A \cap B') \subset (A - B)$.

Demostración de (I):

$[(A - B) \subset (A \cap B')] \Leftrightarrow x \in (A - B) / x \in (A - B) \Rightarrow x \in (A \cap B')$

Pero $x \in (A - B) \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)$… Def. de diferencia

$\Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in B')$… Def. de B'

$\Rightarrow x \in (A \cap B')$… Def. de intersección

Se ha demostrado que si un elemento cualquiera x, tal que
$x \in (A - B)$ implica que $x \in (A \cap B')$.
Por definición de inclusión, se concluye que:
$(A - B) \subset (A \cap B')$.

Demostración de (II):

$[(A \cap B') \subset (A - B)] \Leftrightarrow x \in (A \cap B') / x \in (A \cap B') \Rightarrow x \in (A - B)$.

Pero $x \in (A \cap B') \Rightarrow (x \in A) \wedge (x \in B')$… Def. Intersección

$\Rightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B')$… Def. de B'

$\Rightarrow x \in (A - B)$… Def. Diferencia

Luego: $x \in (A \cap B') \Rightarrow x \in (A - B)$
De (I) y (II) se concluye la demostración

D.3. Teorema Leyes de Morgan:

Tenemos dos subconjuntos A y B del conjunto universal U y designaremos a los respectivos complementos por $A' = C_U A$, $B' = C_U B$, se verifican:

a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Demostración:

a) i) Probar que, demostrar: $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$

1. $x \in (A \cup B)'$ por hipótesis
2. $x \notin A \cup B$ por def. de complemento
3. $x \notin A \wedge x \notin B$ 2° def. U
4. $x \in A' \wedge x \in B'$ 3° def. de complemento
5. $x \in A' \cap B'$ 4° definición de $\cap$
6. $x \in (A \cup B)' \Longrightarrow x \in A' \cap B'$ 1° y 5°
7. $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$ 6° definición $\subset$

ii) Probar que, demostrar: $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$

1. $x \in A' \cap B'$ por hipótesis.
2. $x \in A' \wedge x \in B'$ 1° definición $\cap$
3. $x \notin A \wedge x \notin B$ 2° def. de complemento
4. $x \notin A \cup B$ 3° def. $\cup$
5. $x \in (A \cup B)'$ 4°def. de complemento
6. $x \in A' \cap B' \Longrightarrow x \in (A \cup B)'$ 1° y 5°

7. $A' \cap B' \subset (A \cup B)'$ 6° definición $\subset$

$\therefore$ $(A \cup B)' \subset A' \cap B'$ de i), ii) y definición =

b) i) Probar que, demostrar: $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$

1. $x \in (A \cap B)'$ por hipótesis
2. $x \notin (A \cap B)$ 1° def. de complemento
3. $x \notin A \vee x \notin B$ 2° def. de $\cap$
4. $x \in A' \vee x \in B'$ 3° def. de complemento
5. $x \in A' \cup B'$ 4° def. $\cup$
6. $x \in (A \cap B)' \Longrightarrow x \in A' \cup B'$ 1° y 5°
7. $(A \cap B)' \subset A' \cup B'$ 6° definición $\subset$

ii) Probar que, demostrar: $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$

1. $x \in A' \cup B'$ por hipótesis
2. $x \in A' \vee x \in B'$ 1° def. de $\cup$
3. $x \notin A \vee x \notin B$ 2° def. de complemento
4. $x \notin A \cap B$ 3° def. de $\cap$
5. $x \in (A \cap B)'$ 4° def. de complemento
6. $x \in A' \cup B' \Longrightarrow x \in (A \cap B)'$ 1° y 5°
7. $A' \cup B' \subset (A \cap B)'$ 6° definición $\subset$

$\therefore$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$ de i), ii) y definición =

E. Diferencia Simétrica (A Δ B):

La Diferencia Simétrica de los conjuntos A y B, denotado por A Δ B, es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen solamente a A ó solamente a B. se define por:

Forma simbólica:

$$A \,\Delta\, B = \{x \in U / x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$$

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

Observación: La notación $A \,\Delta\, B$ se lee diferencia simétrica de A y B. Las dos definiciones son equivalentes, en otras palabras puedes utilizar cualquiera de los dos porque el resultado va ser el mismo.

Gráficamente: La diferencia simétrica de A y B, viene ser la parte sombreada

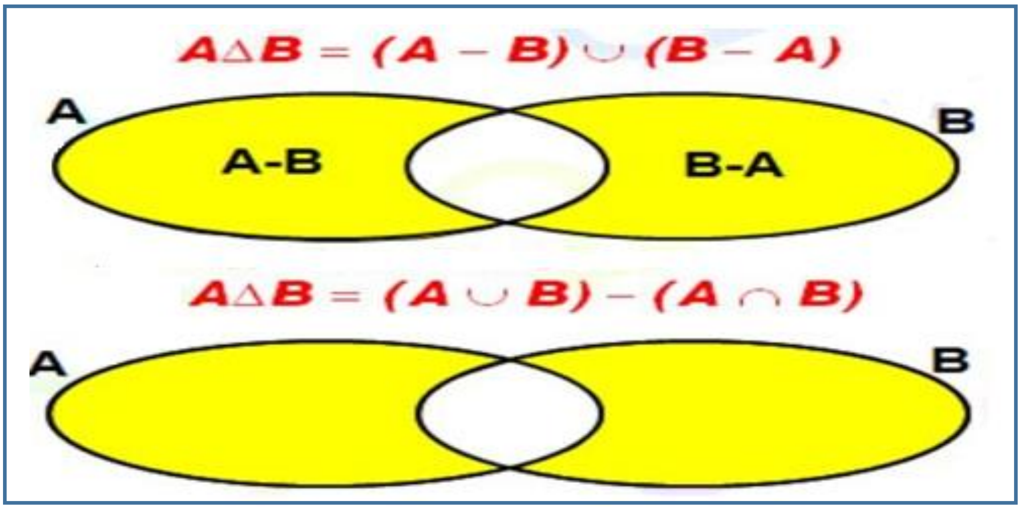


Figura 10. Gráfico de diferencia simétrica A Δ B

Ejemplos:

1. A= { 2,3,4,5,6,7 } , B = { 1,4,6,7,9 }

Calcular: A Δ *B*

Solución:

A - B = { 2, 3,5} y B – A = { 1,9}

A Δ *B* = *(A – B)* ∪ *(B - A)* = {2, 3, 5, 1,9}

2. Si A = {2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {1, 4, 6, 7, 9} y C = { 1, 9 }. Hallar:

a. A Δ B **b. B Δ C** **c. A Δ C**

Solución:

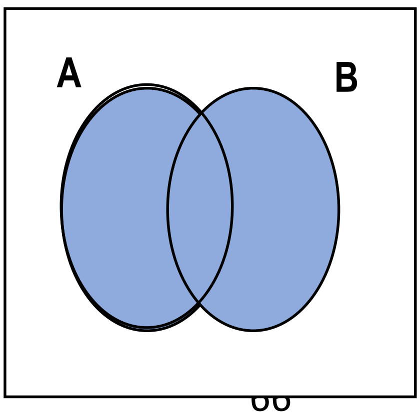
a. A Δ B = (A – B) ⋃ (B – A), donde:

A – B = { x / x ∈ A ∧ x ∉ B } = { 2, 3, 5 }

B – A = { x / x ∈ B ∧ x ∉ A } = { 1, 9 }

Entonces A Δ B = {2, 3, 5, 1, 9}.

Gráfico:



b) $B \Delta C = (B - C) \cup \varnothing = B - C$;

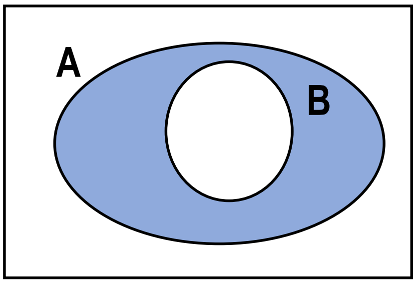
Es decir: $B \Delta C = \{x / x \in B \wedge x \notin C \}=\{4, 6, 7\}$

$C - B = \{x / x \in C \wedge x \notin B\} = x \notin \varnothing$ pues $C \subset B$.

Luego, $B \Delta C = (B - C) \bigcup \varnothing = B - C$,

Es decir: $B \Delta C = \{ 4, 6, 7$

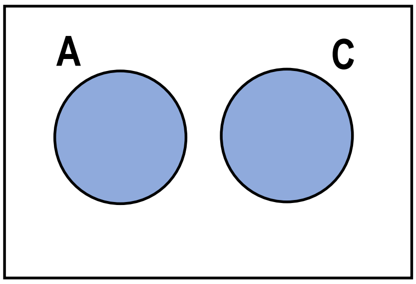
Gráfico:



c) Análogamente, siendo A y C conjuntos disjuntos:

$A \Delta C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 9\}$

Gráfico:



Observaciones:

1. Si $C \subset B$ entonces $B \Delta C$ es el complemento de C con respecto a B.
2. Si A y B son conjuntos disjuntos entonces $A \Delta B = A \cup B$.
3. $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

E.1. Propiedades de la Diferencia Simétrica:

1. $A \,\Delta\, A = \emptyset$
2. $A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$
3. $A \,\Delta\, \emptyset = A$
4. $(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C)$
5. $(A \,\Delta\, B) \cap C = (A \cap C) \,\Delta\, (B \cap C)$
6. $A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$
7. $(A \,\Delta\, B) \cup (B \,\Delta\, C) = (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$

D. 2. Demostraciones de algunas propiedades

a) Probar: $(A \,\Delta\, B) = (A - B) \cup (B - A)$

1. $(A \,\Delta\, B) = (A \cup B) - (A \cap B)$ def. de Δ

2. $(A \,\Delta\, B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)'$

3. $(A \,\Delta\, B) = (A \cup B) \cap (A' \cup B')$

4. $(A \,\Delta\, B) = [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B']$

5. $(A \,\Delta\, B) = [\underbrace{(A \cap A')}_{\emptyset} \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup \underbrace{(B \cap B')}_{\emptyset}]$

6. $(A \,\Delta\, B) = (B \cap A') \cup (A \cap B')$

7. $(A \,\Delta\, B) = (B - A) \cup (A - B)$

8. $(A \,\Delta\, B) = (A - B) \cup (B - A)$

b) Demostrar que: $A \Delta \emptyset = A$

1. $A \Delta \emptyset = (A \cup \emptyset) - (A \cap \emptyset)$

2. $A \Delta \emptyset = A - \emptyset$

3. $A \Delta \emptyset = A$

c) Demostrar que: $A \Delta A = \emptyset$

1. $A \Delta A = (A \cup A) - (A \cap A)$

2. $A \Delta A = A - A$

3. $A \Delta A = \emptyset$

d) Demostrar que: $A \Delta B = B \Delta A$

1. $A \Delta B = (A \cup B) - (B \cap A)$ def. simetría.

2. $A \Delta B = (B \cup A) - (A \cap B)$ prop.conmutativa

3. $A \Delta B = B \Delta A$

e) Demostrar que: $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

Probar que:

$A \cap (B \Delta C) = [(A \cap B) - (A \cap C)] \cup [(A \cap C) - (A \cap B)]$

1. $A \cap (B \Delta C) = A \cap [(B - C) \cup (C - B)]$ def. de simetría

2. $A \cap (B \Delta C) = A \cap [(B \cap C') \cup (C \cap B')]$

3. $A \cap (B \Delta C) = [A \cap (B \cap C')] \cup [A \cap (C \cap B')]$

4. $A \cap (B \Delta C) = \underbrace{[(A \cap B) \cap C')]} \cup \underbrace{[(A \cap C) \cap B')]}$

5. $A \cap (B \Delta C) = [(A \cap B) \cap (A' \cup C')] \cup [(A \cap C) \cap (A' \cup B')]$

6. $A \cap (B \Delta C) = [(A \cap B) \cap (A \cap C')] \cup [(A \cap C) \cap (A \cap B')]$

7. $A \cap (B \Delta C) = \underbrace{[(A \cap B) - (A \cap C)] \cup [(A \cap C) - (A \cap B)]}$

8. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

f) **Demostrar que:** $(A \cap B) \cap C') = (A \cap B) \cap (A' \cup C')$

Partimos del segundo miembro:

1. $(A \cap B) \cap (A' \cup C') = [(A \cap B) \cap A'] \cup [(A \cap B) \cap C']$
2. $(A \cap B) \cap (A' \cup C') = [A \cap (B \cap A')] \cup [(A \cap B) \cap C']$
3. $(A \cap B) \cap (A' \cup C') = [A \cap (A' \cap B)] \cup [(A \cap B) \cap C']$
4. $(A \cap B) \cap (A' \cup C') = [(A \cap A') \cap B] \cup [(A \cap B) \cap C']$
5. $(A \cap B) \cap (A' \cup C') = [\emptyset \cap B] \cup [(A \cap B) \cap C']$
6. $(A \cap B) \cap (A \cup C') = \emptyset \cup [(A \cap B) \cap C']$
7. $(A \cap B) \cap (A \cup C') = [(A \cap B) \cap C']$

1.15. Generalización de la Unión e Intersección de una Familia o Colección Finita de Conjuntos

A. Si $F = \{ A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\}$ es una colección finita de conjuntos, la unión de todos los conjuntos de F se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen, por lo menos a uno de los conjuntos de F.

Notación: **Sea:** $A_1 \cup A_2 \cup, \ldots\ldots\ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$$\mathbf{x} \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Longleftrightarrow \exists i \,/\, \mathbf{x} \in A_i$$

Se lee: $\mathbf{x} \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ si, y solo si existe por lo menos un subíndice i tal que, x pertenece a A_i

B. Si $F = \{ A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n\}$ es una colección finita de conjuntos, la intersección de todos los conjuntos de F se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen, por lo menos a uno de los conjuntos de F.

Notación: **Sea:** $A_1 \cap A_2 \cap, \ldots\ldots\ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$

Entonces: $\mathbf{x} \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \Longleftrightarrow \mathbf{x} \in A_i \,, \forall_i$

Dónde: $\bigcap_{i=1}^{n} A = \{ x \,/\, x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \ldots \wedge \mathbf{x} \in A_n\}$

$$= \{x \,/\, x \in A_i \,, \forall_i \}$$

1.16. INTERVALOS APLICADO A CONJUNTOS

Se llama intervalo al conjunto de números reales comprendidos entre otros dos dados: a y b que se llaman extremos del intervalo.

Los intervalos son de varias clases:

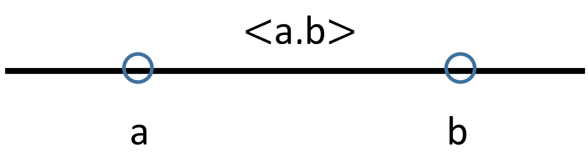
1. **Intervalos abiertos:** $< \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} >$, $\mathbf{a < x < b}$**:**

   Intervalo abierto, <a,b>, es el conjunto de todos los números reales mayores que a y menores que b. Que satisfacen **a < x < b y se denota por** <a,b>.

   Su forma simbólica es:

   $$<a,b> = \{\ x \in R\ /\ \mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b}\ \}$$

   Su gráfica es:

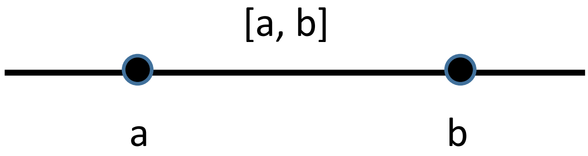
2. **Intervalos cerrados:** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$, $\mathbf{a \le x \le b}$**:**

   Intervalo cerrado, [a, b], es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que a y menores o iguales que b. Que satisfacen **a ≤ x ≤ b y se denota por [**a, b].

   Su forma simbólica es:

   $$[a,b] = \{\ x \in R\ /\ \mathbf{a} \le \mathbf{x} \le \mathbf{b}\ \}$$

Su gráfica es:

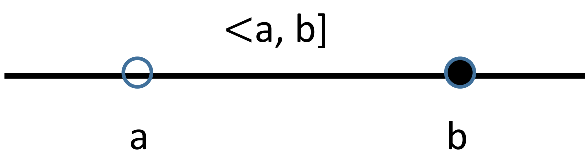


3. Otros intervalos:

- También se tiene los siguientes conjuntos de números reales, los cuales se denominan, intervalos abiertos por la izquierda, e intervalos cerrados por la derecha respectivamente:

Forma simbólica: $<a,b] = \{ x \in R / \mathbf{a} < \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \}$

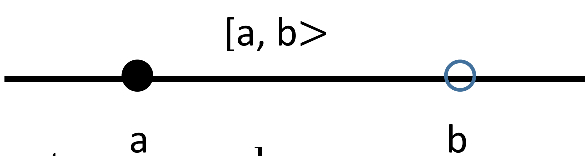
Su gráfica:



- También se tiene los siguientes conjuntos de números reales, los cuales se denominan, intervalos cerrados por la izquierda, e intervalos abiertos por la derecha respectivamente:

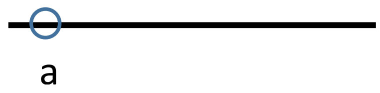
Forma simbólica: $[a,b> = \{ x \in R / \mathbf{a} \leq \mathbf{x} < \mathbf{b} \}$

Su gráfica:

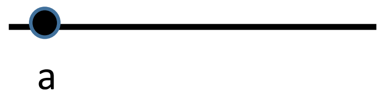


- También se tiene otros intervalos:

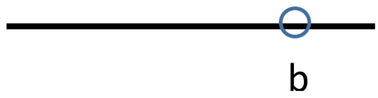
$< a, +\infty > = \{ x \in R \,/\, \mathbf{x} > \boldsymbol{a} \}$



$[a, +\infty > = \{ x \in R \,/\, \mathbf{x} \geq \boldsymbol{a} \}$



$< -\infty, b > = \{ x \in R \,/\, \mathbf{x} < \boldsymbol{b} \}$



$< -\infty, b] = \{ x \in R \,/\, \mathbf{x} \leq \boldsymbol{b} \}$

1.17. Operaciones de Conjuntos Utilizando Intervalos

En las operaciones de conjuntos con intervalos el conjunto universal viene ser los Números Reales.

Ejemplos:

1. **Determinar el complemento del conjunto A** = $[\, 6, +\infty >$

   Solución:

   C_A= $\{ x \in R \,/\, \mathbf{x} \notin [\, 6, +\infty > \}$

   C_A= $\{ x \in R \,/\, \sim (\mathbf{x} \in [\, 6, +\infty >) \}$

   C_A= $\{ x \in R \,/\, c \,) \}$

   C_A= $\{ x \in R \,/\, (\mathbf{x} < 6 \,) \}$

   C_A= $< -\infty, 6 >$

Nota:

Al definir el complemento de un conjunto viene ser los elementos que no pertenecen a ese conjunto, entonces aplicamos la definición de complemento $\sim (x \in [\,6, +\infty >)$ y esto vendría ser $\sim (\mathbf{x} \geq 6\,)$ y cuando ingresa la negación entonces vendría hacer lo contrario de **“** ≥” viene ser menor “<”.

Observación:

Desigualdad	Negación de la desigualdad
$x > a$	$\boldsymbol{\sim (x > a) = x \leq a}$
$x < a$	$\boldsymbol{\sim (x < a) = x \geq a}$
$x \geq a$	$\boldsymbol{\sim (x \geq a) = x < a}$
$x \leq a$	$\boldsymbol{\sim (x \leq a) = x > a}$

La negación se considera porque la definición de complemento nos dice que viene ser los elementos que no pertenecen al conjunto mencionado, y también tener en cuenta que la negación solo afecta a la condición (a la desigualdad).

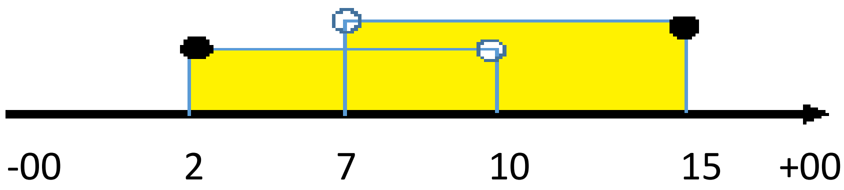
2. Sea $A = [\,2, 10 >$ y $B = <7, 15\,]$

Hallar: $A \cup B$; $A \cap B$ y $A - B$

Solución:

- $A \cup B = \{x \in R \,/\, \mathbf{x} \in [\,2, 10 > \vee\ \mathbf{x} \in <\ 7, 15\,]\} = [2, 15\,]$

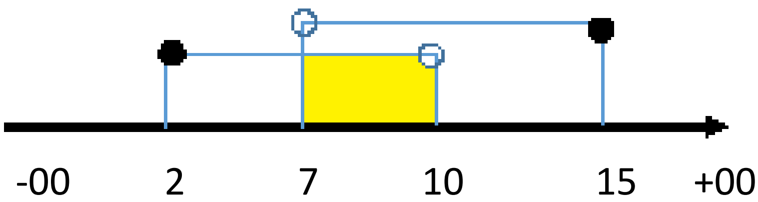
Gráficamente: $[2, 15]$



Como nos piden unión es todo lo graficado $[2, 15\ ]$

- $A \cap B\ \ \{x \in R\ /\ \mathbf{x} \in [\ 2, 10 >\ \wedge\ \mathbf{x} \in <\ 7, 15\ ]\} = <7, 10>$

Gráficamente: $< 7, 10 >$



- $A - B =\ \{x \in R\ /\ \mathbf{x} \in [\ 2, 10 >\ \text{-}\ \mathbf{x} \in <\ 7, 15\ ]\}$

Para poder graficar y obtener el resultado de una forma rápida y sencilla, vamos a utilizar la propiedad:

$$A - B = A \cap B'$$

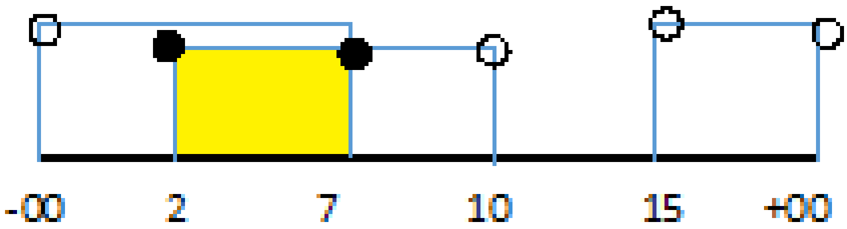
Para eso necesito primero transformar el conjunto B, en el completo de B $'$ y asi obtener: $A - B = A \cap B\ '$

$B' = < -00,\ 7\ ]\ \ \cup\ \ \ < 15 + 00 >$

Entonces tenemos:

$$[\,2,10 > \ \cap (< -00,\ 7\,] \ \cup \quad < 15 + 00 >) \ = \ [\,2,7]$$

Gráfico:



3. Determinar el complemento de los conjuntos:

$A = \ < -9, -3\,] \cup < 1,\ 10\ ]$, $B = < -5,\ 15\,] \cup [\,-3, 8 >$

Hallar: C_A ; C_B ; $(A \cup B)'$

Solucion:

$C_A \ = \ \sim (\mathbf{x} \in < -9, -3\,] \cup < 1,\ 10\ ]\ )$

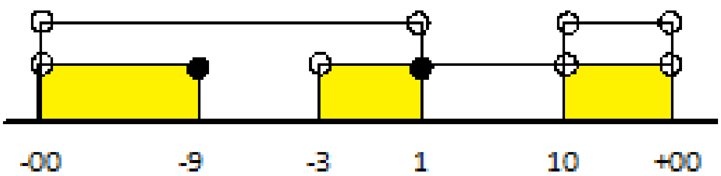
$C_A \ = \ \sim (-9 \ < x \ \leq \ -3 \ \vee \ 1 \ < x \ \leq \ 10)$

$C_A \ = \ \sim (-9 \ < x \ \leq \ -3\,) \ \wedge \ \sim (1 \ < x \ \leq \ 10)$

$C_A \ = \ \sim (\ x > \ -9 \ \wedge \ x \ \leq \ -3\,) \ \wedge \ \sim (x \ > 1 \ \wedge \ x \ \leq \ 10)$

$C_A \ = \ (\ x \leq \ -9 \ \vee \ x \ > \ -3\,) \ \wedge \ (x \ \leq 1 \ \vee \ x \ > \ 10)$

$C_A \ = (< -00\,, -9\,] \cup < -3, +00 >) \cap (< -00\,, 1] \cup < 10, +00 >)$



$C_A = (< -00\,, -9\,] \cup < -3,\ 1] \cup < 10, +00 >)$

$C_B = \sim (\mathbf{x} \in < -5, 15\,] \cup [-3,\ 8 >\ )$

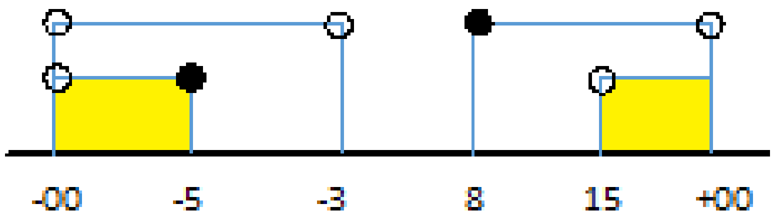
$C_B = \sim (-5 < x \leq 15 \ \vee \ -3 \leq x < 8)$

$C_B = \sim (-5 < x \leq 15\,) \wedge \sim (-3 \leq x < 8)$

$C_B = \sim (\, x > -5 \wedge x \leq 15\,) \wedge \sim (x \geq -3 \wedge x < 8)$

$C_B = (\, x \leq -5 \vee x > 15\,) \wedge (x < -3 \vee x \geq 8)$

$C_B = (< -00\,, -5\,] \cup < 15, +00 >) \cap (< -00\,, -3 > \cup\ [8, +00 >)$



$C_B = < -00\,, -5\,] \cup < 15, +00 >$

$(A \cup B) = < -9, 15\,]$

$(A \cup B)' = < -00\,, -9\,] \cup < 15, +00 >)$

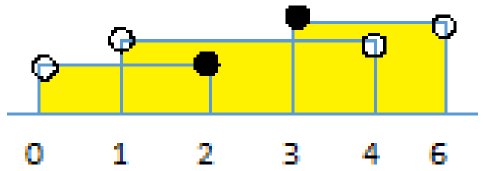
4. Simplificar :

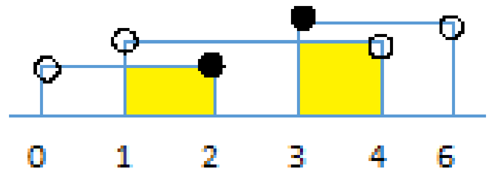
$$< \mathbf{1}, \mathbf{4} > \ \boldsymbol{\Delta}\ \mathbf{(}\ < \mathbf{0}, \mathbf{2}] \cup [\,\mathbf{3}, \mathbf{6} >)$$

Solución:

Sabemos: A Δ B = (A∪ B) – (A ∩ B)

$$(< 1,4 > \cup (< 0,2] \cup [\,3,6 >)) - (< 1,4 > \cap (< 0,2] \cup [\,3,6 >))$$





$$< 0,6 > - \ (< 1,2] \cup [\,3,4 >)$$

Utilizamos la propiedad: A – B = A ∩ B′; tenemos:

$< 0,6 > \ \cap \ (< 1,2] \cup [\,3,4 >)'$

Resolvemos el complemento primero: $(< 1,2] \cup [\,3,4 >)'$

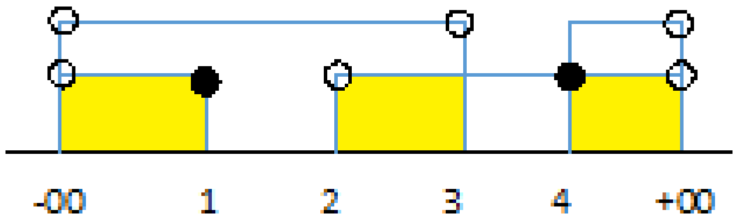
$\sim (\mathbf{x} \in < 1,2\,] \ \cup \ [3,\ 4\ >\ )$

$\sim (1 < x \ \leq \ 2 \ \vee \ 3 \ \leq x \ < \ 4)$

$\sim (\,x > \ 1 \ \wedge \ x \ \leq \ 2) \ \wedge \ \sim (x \ \geq 3 \ \wedge \ x \ < \ 4)$

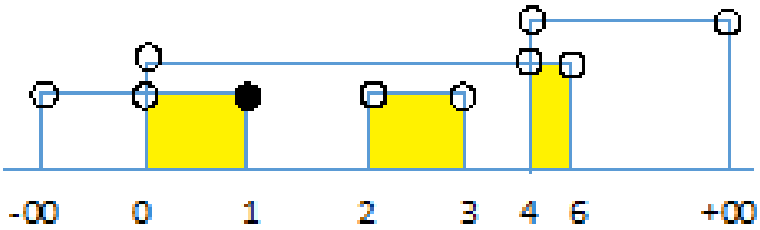
$(\,x \leq \ 1 \ \vee \ x \ > \ 2\,) \ \wedge \ (x \ < 3 \ \vee \ x \ \geq \ 4)$

$(< -00\,,1\,] \cup < 2,+00 >) \cap (< -00\,,3 > \cup \ [4,+00 >)$



$< -00\,,1] \cup \ < 2,3 > \cup < 4,+00 >$

$$< 0, 6 > \ \cap (< -00\,, 1] \cup \ < 2, 3 > \cup < 4, +00 >)$$



$$< 0\,, 1] \ \cup \ < 2, 3 > \ \cup < 4, 6 >$$

5. Resolver:

$((< -00\,, 4] \cup [3,\ 9 >)' - (< 3, +00 > \ \cup\ [1,\ 9]))' \cap (< 5, 3 > \cup\ [6, 10 >)$

Solución:

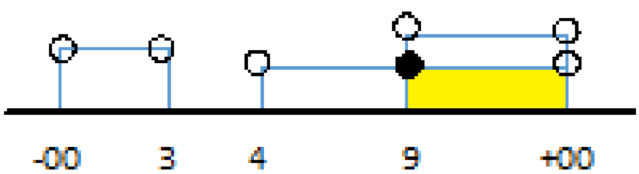
Resolvemos los complementos: $((< -00\,, 4] \cup [3,\ 9 >)'$

$\sim (x \ \leq \ 4 \ \ \vee \ 3 \ \leq x \ < \ \ 9)$

$\sim (\ x \ \leq \ 4) \ \wedge \ \sim (x \ \geq 3 \ \wedge \ x \ < \ \ 9)$

$x \ > \ 4 \ \ \wedge \ \ (x \ < 3 \ \vee \ x \ \geq \ \ 9)$

$< 4, +00 >) \cap (< -00\,, 3 > \cup \ [9, +00 >)$



$\mathbf{[9, +00 >)}$ **...** **(1)**

Ahora tenemos:

$([9, +00 > - (< 3, +00 > \cup [1,\ 9]))'$

Utilizamos la propiedad: A – B = A ∩ B'; tenemos:

$([9, +00 > \cap (< 3, +00 > \cup [1,\ 9])')'$

Resolvemos:

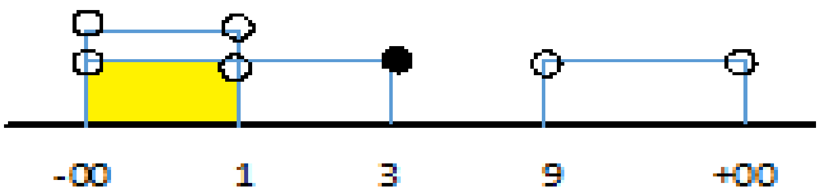
$(< 3, +00 > \cup [1,\ 9])'$

$\sim (x > 3 \lor 1 \leq x \leq 9)$

$\sim (x > 3) \land \sim (x \geq 1 \land x \leq 9)$

$x \leq 3 \land (x < 1 \lor x > 9)$

$< -00, 3] \cap (< -00, 1 > \cup < 9, +00 >)$



$< \mathbf{-00, 1} >$ **.... (2)**

Entonces tenemos nuestros dos complementos (1) y (2)

$(\mathbf{[9, +00 >)} \cap < \mathbf{-00, 1} >)'$

Entonces lo unimos con el resto del ejercicio

$< -00, +00 > \cap (< 3, 5 > \cup [6, 10 >)$

$(< 3, 5 > \cup [6, 10 >)$

1.18. NÚMERO DE ELEMENTOS DE UN CONJUNTO

Naturalmente que la idea del número de elementos de un conjunto finito cualesquiera, es primitiva por lo que se admite como la cantidad de elementos que hay en un conjunto. Sea A un conjunto cualquiera, al número de elementos distintos que forman dicho conjunto denota por n(A) llamado también cardinalidad del conjunto.

Se denota por: **n(A) = card (A)**

Se lee: **n(A)** **:** Se lee "el número de elementos del conjunto A"

card (A): Se lee "el cardinal del conjunto A"

Ejemplo:

1. Si A = {2, 4, 6, 8}, B = {1,2, 3, 2 }, C = {p, q, r, p, q }

Solución: n(A) = 4 n(B) = 3 n(C) = 3

1.18.1. Propiedades del Número de Elementos de un Conjunto

1) Si A y B son conjuntos finitos disjuntos, entonces tenemos:

$$\boxed{\mathbf{n(A \cup B) = n(\,A\,) + n(\,B\,),\quad si\ A \cap B = \varnothing}}$$

Teniendo en cuenta que si $A \cap B = \varnothing$, entonces $n\,(A \cap B) = 0$.

$$\mathbf{n(A \cup B) = n(\,A\,) + n(\,B\,)}$$

$A \cup B$ es la parte sombreada del gráfico, entonces:

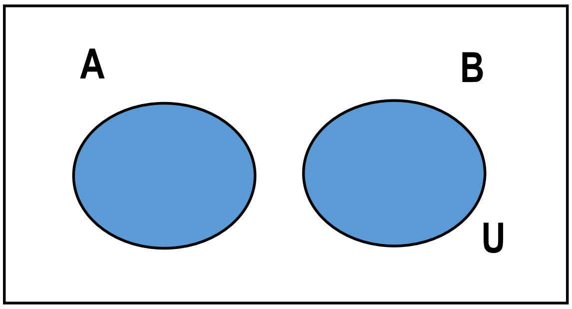


Figura 11. Gráfico de la 1° propiedad de n(A)

Demostración:

Supongamos que: A tiene x elementos ⟹ n(A) = x

B tiene x elementos ⟹ n(A) = x

Por hipótesis no hay elemento común a ambos conjuntos

$(A \cup B)$ tiene x + y elementos, esto es: $n(A \cup B) = x + y = n(A) + n(B)$

Por lo tanto: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

2) Si A y B son conjuntos finitos arbitrarios, no necesariamente disjuntos, expresamos:

$$\boxed{n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)}$$

Graficando:

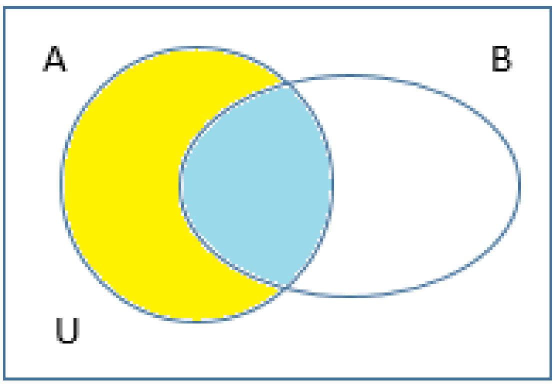


Figura 12. Gráfico de la 2° propiedad de n(A)

Demostración:

Sea $M = A - B = A \cap B'$, $N = A \cap B$, se tiene:

$M \cup N = (A \cap B') \cup (A \cap B) = A$

$M \cap N = (A \cap B') \cap (A \cap B) = A$; por asociativa y conmutatividad de $\cap$

$M \cap N = A \cap (B' \cap B) \cap A$; pero como $B \cap B' = \emptyset$, se tiene

$M \cap N = \emptyset$, luego por la propiedad (1) se tiene:

$(A) = n(M \cup N) = n(M) + n(N) = n(A - B) + n(A \cap B)$

De donde $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

3) Si A y B son conjuntos finitos arbitrarios, no necesariamente disjuntos, entonces:

$$\boxed{\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}}$$

Graficando:

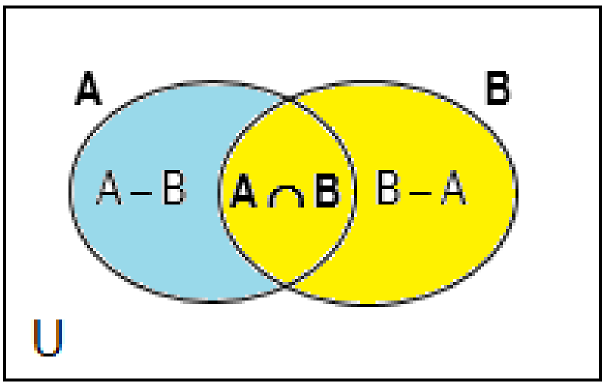


Figura 13. Gráfico de la 3° propiedad de n(A)

Demostración:

Como $A \cup B = (A - B) \cup B$ y $(A - B) \cap B = \emptyset$ entonces:

$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B)$ por la propiedad 1

$n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(B)$ por la propiedad 2

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

por lo tanto: $\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$

4) Si A, B y C son conjuntos finitos tales que: $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ entonces:

$$\boxed{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}$$

Graficando:

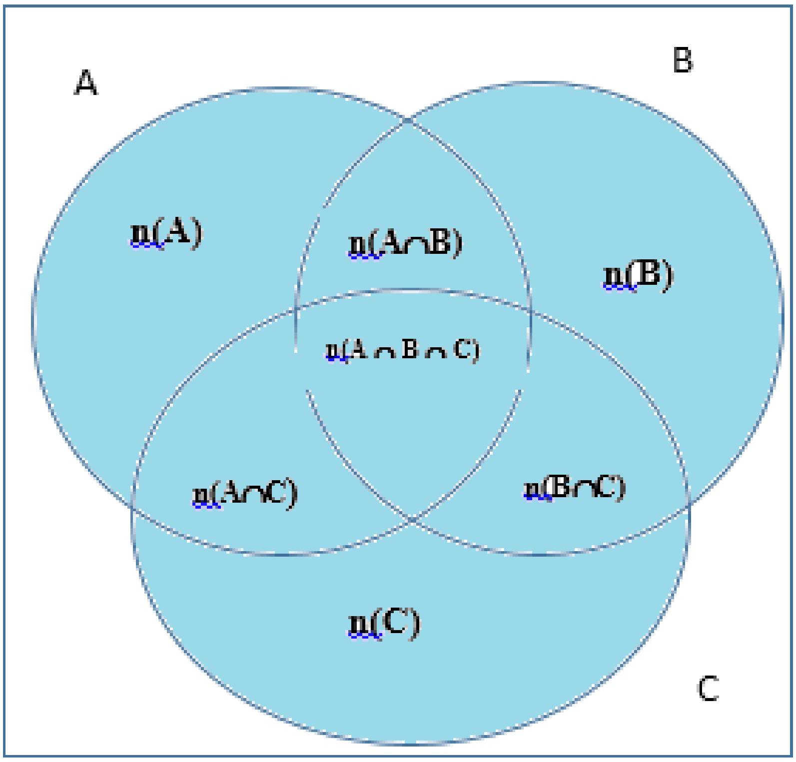


Figura 14. Gráfico de la 4° propiedad de n(A)

Ejemplos:

1. En un universo de 26 elementos se tienen 3 conjuntos A, B, C. Se sabe que $n(A \cap B \cap C) = 6$, $n(A - B) = 8$, $n(B \cap C) = 8$, $n(A \cap C) = 7$, $n(C) = 13$ $n(A \cap B) = 8$, $n(B') = 15$

Determine:

a) $n(A)$ b) $n(C-B)$ c) $(A - C)$

Solución:

a) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

$$8 = n(A) - 8$$

$$n(A) = 16$$

b) $n(C - B) = n(C) - n(C \cap B)$

$$n(C - B) = 13 - 8$$

$$n(C - B) = 5$$

c) $(A - C) = n(A) - n(A \cap C)$

$$(A - C) = 16 - 7$$

$$(A - C) = 9$$

2. El conjunto A tiene 20 elementos, $A \cap B$ tiene 12 elementos y $A \cup B$ tiene 60 elementos, ¿Cuál es el número de elementos de conjunto B?

Solución:

$n(A) = 20$

$n(A \cap B) = 15$

$n(A \cup B) = 60$

Sabemos que:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$60 = 20 + n(B) - 12$

$n(B) = 52$

Por lo tanto B tiene 52 elementos.

3. De un grupo de 100 alumnos: 49 no hablan inglés, 53 no hablan francés y 27 no hablan inglés ni Francés. Cuántos alumnos hablan uno de los idiomas?

Solución:

Hablan Inglés = I Hablan Francés = F

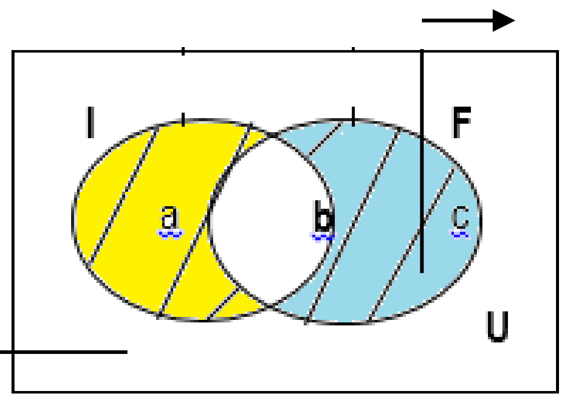
$n(I') = 49 \Rightarrow n(I) = 51,$

$n(F') = 53 \Rightarrow n(F) = 47.$

Gráficamente:

Solo hablan francés

Solo hablan ingles



Por dato: $c + 27 = 49 \Rightarrow c = 22,$

$a + 27 = 53 \Rightarrow a = 26.$

Luego:

$a + c = 48.$

4. La Universidad Nacional de Barranca está organizando un evento académico en: ciencias, letras y tecnología. Hay 870 estudiantes en la Universidad Nacional de Barranca que van a participar en las materias mencionadas:
Ciencias: 400
Letras: 390
Tecnología: 480
Ciencias o Letras: 680
210 no pueden participar en ninguno de las materias.
90 participan en las dos primeras pero no en la tercera.
190 pueden participar solamente en tecnología.
a) ¿Cuantos estudiantes pueden participar en los tres cursos mencionados?
b) ¿Cuantos estudiantes pueden participar por lo menos en dos de las materias?
c) ¿Cuántos estudiantes tiene la universidad?

Solución:

Datos: $n(c) = 400$

$n(l) = 390$

$n(t) = 480$

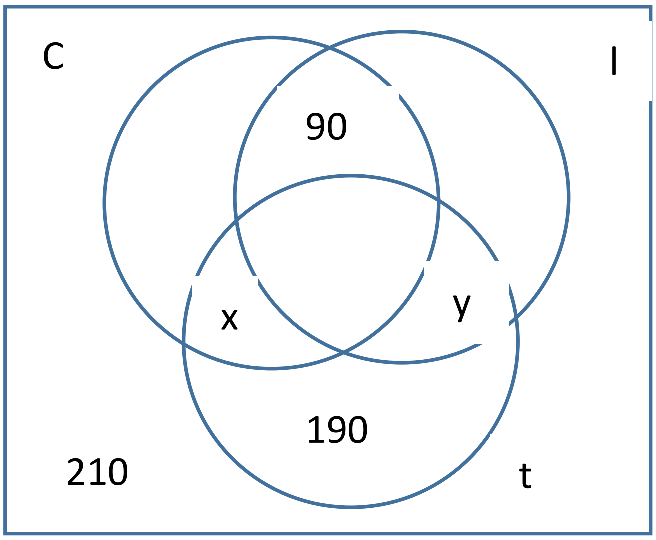
$n(c \cup l) = 680$

$n(c' \cap l' \cap t') = 210$

$n(c \cap l \cap t') = 90$

$n(c' \cap l' \cap t) = 190$

Graficamos:



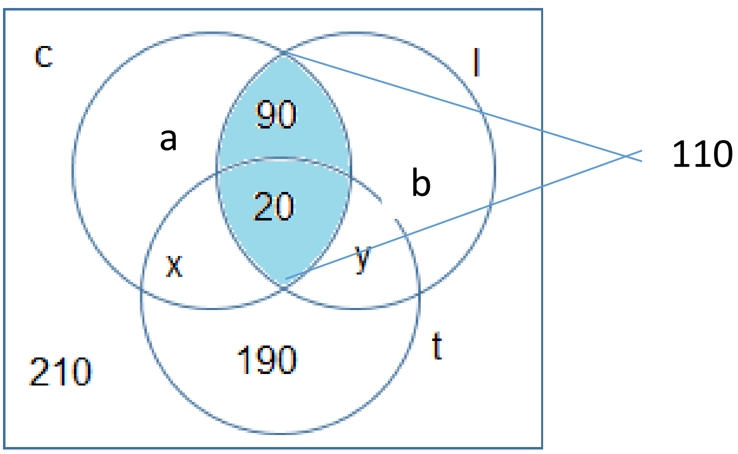
Utilizamos las tercera propiedad: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) – n(A\cap B)$

$n(c \cup l) = n(c) + n(l) – n(c \cap l)$

$680 = 400 + 390 - n(c \cap l)$

$n(c \cap l) = 110$

Entonces sabemos que la intercesión de ciencia y letras es 110 pero si conocemos que 90 ya participan en las dos primeras materias, entonces la diferencia seria 20, entonces tendríamos en el gráfico:



a) Los estudiantes que participan en las tres materias son 20

b) Entonces como me piden cuantos van a participar por lo menos en dos esto quiere decir mínimo dos materias en otras palabras la suma de los participantes a las tres materias, suma de:

$x + y + 90 + 20 \ldots (p)$

, pero no conocemos los valores de x e y, pero sabemos que $20 + 190 + x + y = 480$ (por tecnología)

$x + y = 270 \ldots (q)$

Entonces reemplazamos (q) en (p) para obtener la cantidad de estudiantes que participan por lo menos en 2 materias obteniendo:

$270 + 90 + 20 = 380$

c) Es la suma de 210 que no participan + 870 que participan obteniendo = 1080, entonces la Universidad Nacional de Barranca tiene 1080 estudiantes.

5. En la actualidad los estudiantes de la UNAB están empleando el uso de tecnología para complementar su enseñanza. Se realizó una encuesta sobre el tipo de aparato tecnológico que prefieren, los resultados fueron los siguientes: 60 prefieren laptop, 25 prefieren tablet, 10 prefieren smartphone, 2 prefieren los tres aparatos, 10 prefieren laptop y tablet, 4 prefieren tablet y smartphone, 4 ninguno, 70 no prefieren smartphone.

a) ¿Cuantos estudiantes prefieren únicamente laptop?
b) ¿Cuantos estudiantes prefieren únicamente smartphone?
c) ¿Cuantos estudiantes prefieren laptop y smartphone?
d) ¿Cuantos estudiantes prefieren al menos un aparato?
e) ¿Cuantos estudiantes prefieren a lo más un aparato?
f) ¿Cuantos estudiantes fueron encuestados?

Solución:

L = el conjunto de estudiantes que prefieren laptop.

T = el conjunto de estudiantes que prefieren tablet.

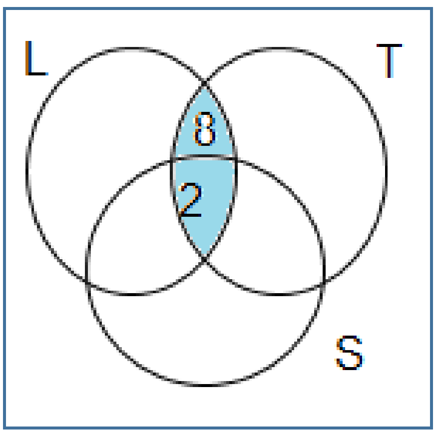
S = el conjunto de estudiantes que prefieren smartphone.

Datos:

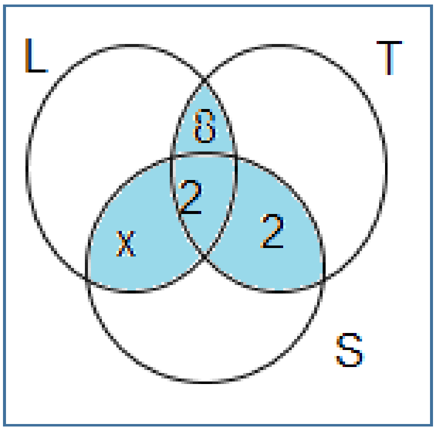
$n(L) = 60$, $n(T) = 25$, $n(S) = 10$, $n(L \cap T \cap S) = 2$,

$n(L \cap T) = 10$, $n(T \cap S) = 4$, $n(L' \cup T' \cup S') = 4$, $n(S') = 70$

Intersección de tres $n(L \cap T \cap S) = 2$ Intersecciones de dos $n(L \cap T) = 10$. Tenemos 2 elementos, entonces nos hace falta 8 elementos para completar los 10



$n(T \cap S) = 4$. Tenemos 2 elementos, entonces nos hace falta 2 elementos para completar los 4. De $(L \cap S)$ no tenemos información. Llamemos x al espacio que falta en la intersección $(L \cap S)$

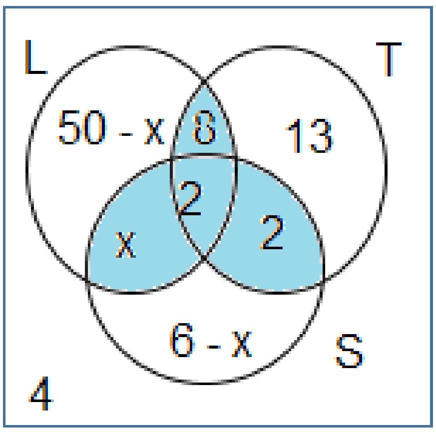


Si $n(T) = 25$, entonces el espacio que falta debe ser 13.

Si $n(L) = 60$, entonces el espacio que falta es $60 - (8 + 2 + x) = 50 - x$

Si $n(S) = 10$, entonces el espacio que falta es $10 - (2 + 2 + x) = 6 - x$

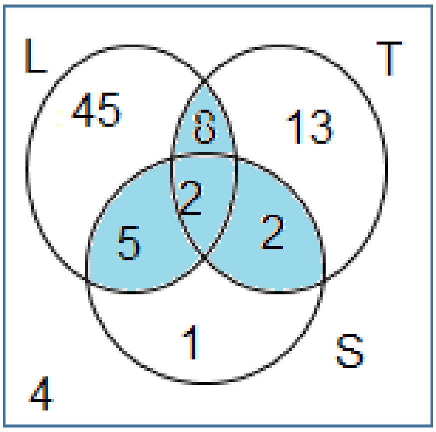
$n(L' \cup T' \cup S') = 4$



Como nos falta usar n(S) = 70, tenemos: 70 = 4 + (50 − x) + 8 + 13

resolviendo x = 5

Entonces tenemos:



a) 45

b) 1

c) 5 + 2 = 7

d) 45 + 8 + 13 + 5 + 2 + 2 + 1 = 76

e) 4 + 45 + 1 + 13 = 63

f) 80

6. Una empresa realiza una investigación de mercado sobre el consumo de productos obteniendo los siguientes resultados:

9.8% consumen el producto A.

22.9% consumen el producto B

12.1% consumen el producto C

5.1% consumen A y B

3.7% consumen A y C

6% consumen B y C

32.4% consumen al menos uno de los productos mencionados

Calcular el porcentaje de personas que:

a) ¿No consumen ninguno de los productos mencionados?

b) ¿Consumen exactamente dos productos?

Solución:

Datos:

$n(A) = 9.8\%$; $n(B) = 22.9\%$; $n(C) = 12.1\%$; $n(A \cap B) = 5.1\%$

$n(A \cap C) = 3.7\%$; $n(B \cap C) = 6\%$; $n(A \cup B \cup C) = 32.4\%$

a) $100\ \% - 32.4\% = 67.6\%$; no consumen ninguno de los productos mencionados.

b) Aquí si vamos a utilizar la 4° propiedad para obtener la intersección de los tres productos y así poder sumarlos:

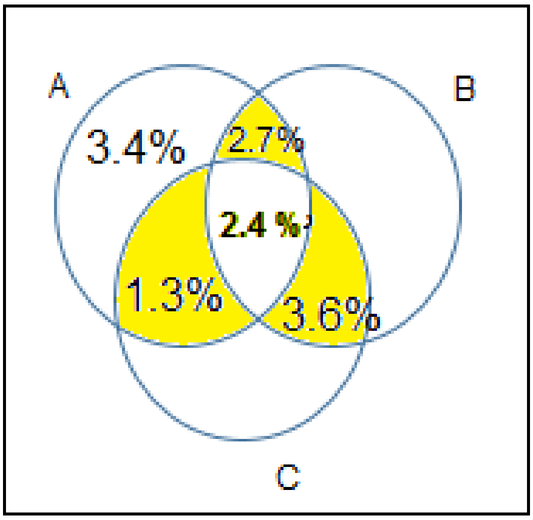
$$\mathbf{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}$$

$$32.4\% = 9.8\% + 22.9\% + 12.1\% - 5.1\% - 3.7\% - 6\% + \mathbf{n(A \cap B \cap C)}$$

$$32.4\% = 30\% + \mathbf{n(A \cap B \cap C)}$$

$n(A \cap B \cap C) = 2.4\%$

Con este resultado podemos encontrar las demás intersecciones como se muestra en el gráfico:



Ahora sumamos 2.7% + 1.3% + 3.6% = 7.6%

Son los que consumen exactamente dos productos

1.19. EJERCICIOS DESARROLLADOS

1. Sean los conjuntos $A = \{ x \in N_0 / \ 7 - x = 3 \ \vee x < 3\}$,

$B = \{x \in N_0 / \ 5 - x > 2 \ \wedge \frac{1}{5}\ (6x - 2) \geq \ 2\}$,

$C = \{x \in N_0 / \ x$ es cuadrado perfecto, $x \leq 10\}$. Hallar:

a) $(A \cup B) \cap (C - A)$ b) $(A \cap B) - (A - C)$ c) $(A \,\Delta\, B) \cap (B \cap C)$

Solución:

A= {0, 1, 2, 4} ; B= {2} ; C= {0, 1, 4, 9}

a) (A∪B) ∩ (C – A)

(A∪B) = {0, 1, 2, 4} ; (C – A) = {9}

(A∪B) ∩ (C – A) = ∅

b) (A ∩ B) - (A – C)

(A ∩ B) = {2} ; (A – C) = {2}

(A ∩ B) - (A – C) = ∅

c) (A Δ B) ∩ (B ∩ C)

(A Δ B) = (A∪B) - (A ∩ B) = {0, 1, 4}

(B ∩ C) = ∅

(A Δ B) ∩ (B ∩ C) = ∅

2. Dado el conjunto universal U = { x ∈ N_0 / x ≤ 50}

y los subconjuntos: A = { $\frac{x^2-1}{3}$ / x ∈ U ∧ x es N° primo};

B= { $\frac{x^2+1}{3}$ / x ∈ U ∧ x es impar} C= { $\frac{\sqrt{x-1}}{2}$ / x ∈ U ∧ x es par}

Hallar: a) (A Δ C) b) (A Δ B) Δ C c) (A∪B) Δ (A∪C)

Solución:

U = { 0, 1, 2, 3, 4, …, 50}

n° primos $x \leq 50$ = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

A = {1, 8, 16, 40}

B = {∅}

C = {∅}

a) (A Δ C) = (A ∪ C) - (A ∩ C)

(A ∪ C) = {1, 8, 16, 40} ; (A ∩ C) = {∅}

(A ∪ C) - (A ∩ C) = {∅}

b) (A Δ B) Δ C = ((A Δ B) ∪ C) – ((A Δ B) ∩ C)

(A Δ B) = {1, 8, 16, 40}

((A Δ B) ∪ C) – ((A Δ B) ∩ C) = {1, 8, 16, 40}

c) (A∪B) Δ (A∪C) = {∅}

3. Sea U = { $x \in N$ / $0 < x \leq 10$} y los conjuntos A= { $x \in U$ / x es N° primo} B= { $x \in U$ / x es cuadrado perfecto} C= { $x \in U$ / x es impar}. Hallar: a) $C_{(A-C)} \cap B$ b) $C_{(A \cap C)} - C_{(B \cup C)}$

Solución:

U = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

A = { 2, 3, 5, 7}

B = {1, 4, 9}

C = { 1, 3, 5, 7, 9}

a) $C_{(A-C)} \cap B$

$(A - C) = \{2\}$

$C_{(A-C)} = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$C_{(A-C)} \cap B = \{1, 4, 9\}$

b) $C_{(A\cap C)}$ - $C_{(B\cup C)}$

$C_{(A\cap C)} = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10\}$; $C_{(B\cup C)} = \{2, 6, 8, 10\}$

$C_{(A\cap C)} - C_{(B\cup C)} = \{1, 4, 9\}$

4. Dados los conjuntos: $U = \{ x \in N_0 / \ x \leq 15\}$

$A = \{ x \in N_0 / \ 2x \leq 13\}$

$B = \{ x \in A / \ (x^2 - 2x) \notin A\}$. Hallar: a) $(A\cup B) \Delta (A\cap B)$

b) $C_{(A\cap B)} - C_{(B\cup A)}$

Solución:

$U = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 15\}$

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{1, 4, 5, 6\}$

a) $(A\cup B) \Delta (A\cap B)$

$(A\cup B) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $(A\cap B) = \{1, 4, 5, 6\}$

$(A\cup B) \Delta (A\cap B) = \{0, 2, 3\}$

b) $C_{(A\cap B)}$ - $C_{(B\cup A)}$

$C_{(A\cap B)} = \{0, 2, 3, 7 \ldots, 15\}$; $C_{(B\cup A)} = \{7, 8, \ldots, 15\}$

$C_{(A\cap B)} - C_{(B\cup A)} = \{0, 2, 3\}$

5. Si A= { $x \in N$ / $x > 4 \rightarrow x = 6$} B= { $x \in N$ /$x > 0 \wedge x \leq 5$}

C= { $x \in Z$ / ~ ($x > 1 \rightarrow x^2 \neq 4x - 3$ }

Hallar: M = (A ∩ B) - (B ∩ C)

Solución:

A= { $x \in N$ / $x > 4 \rightarrow x = 6$}

Aquí utilizamos la propiedad de la inclusión:

$(p \rightarrow q) \equiv \sim p \vee q$; $\underbrace{x > 4}_{p} \rightarrow \underbrace{x = 6}_{q}$

Entonces tenemos: $\sim (x > 4) \vee x = 6$

$(x \leq 4) \vee x = 6$

A= { 1, 2, 3, 4, 6} ; B = {1, 2, 3, 4, 5} C = {3}

(A ∩ B) = {1, 2, 3, 4} ; (B ∩ C) = {3}

M = (A ∩ B) - (B ∩ C) = {1, 2, 4}

6. Dados los conjuntos A = { $x \in Z$ / ~ ($x \leq -2 \vee x > 3$)}

B = { $x \in N$/ ~ ($-1 < x \leq 3 \rightarrow x = 5$)} y

C = { $x \in Z$/ ($x < -2$ V $x \geq 2$) $\rightarrow x > 1$}.

Hallar (B ∩ C) Δ (A ∩ B)

Solución:

A = { $x \in Z$ / ~ ($x \leq -2$) ∧ ~ ($x > 3$)}

A = { $x \in Z$ / ($x > -2$) ∧ ($x \leq 3$)}

A = {-1, 0, 1, 2, 3}

B = { x ∈ N/ ~ (-1$<$ x ∧ x $\leq$ 3) → ~(x = 5)}

Aquí utilizamos la propiedad de la inclusión:

$(p \rightarrow q) \equiv \sim p \vee q$

B = { x ∈ N/ (x $>$ -1 ∧ x $\leq$ 3) ∨ (x $\neq$ 5)}

B = {0,1, 2, 3}

C = {-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …. }

(B ∩ C) Δ (A ∩ B) = ∅

7. Sean los conjuntos A = { x ∈ N / x = $\frac{1}{2}(k^2 - 1)$, k ∈ N }

B = { x ∈ N / x^2 = 8x} , C = { x ∈ N / x^2 - 32x + 192 = 0} Hallar el resultado de (B – A) ∩ C

Solución:

A = { 4, 12, 24, 40, 60, … }

B = {8}

C = {8, 24}

(B – A) ∩ C = {8}

8. **Simplificar**:

[2,9] ∩ ((**C**$< -\infty, 3]$ ∪ [3,6]) - $< 2, 8]$)

Solución:

[2,9] ∩ ((**C**$< -\infty, 3]$ ∪ [3,6]) - $< 2, 8]$)

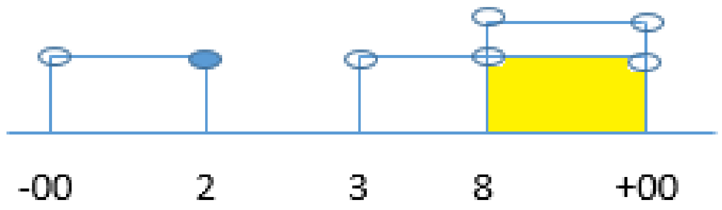
C$< -\infty, 3]$ = $< 3 , +\infty >$

$< 3\,,+\infty > \cup\ [3,6]) = \ < 3\,,+\infty >$

$[2,9] \cap\ (< 3\,,+\infty > - < 2, 8])$

Utilizamos: la propiedad: $A - B = A\ \cap\ B'$

$[2,9] \cap\ \underbrace{(< 3\,,+\infty > \cap < -\infty, 2]\ \cup < 8, +\infty >)}$



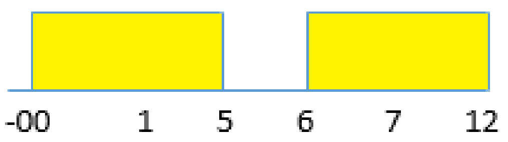
$[2,9] \cap\ < 8, +\infty > = \ < 8\,, 9]$

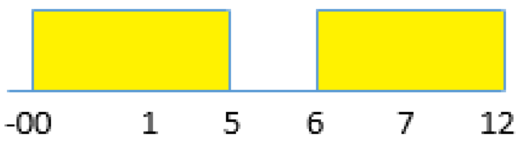
9. Simplificar:

$((< -00\,, 5 >\ \cup < 6,\ 12 >)\ \Delta\ \{1, 7\}$

Solución:

$\underbrace{((< -00\,, 5 >\ \cup < 6, 12 >) \cup \{1, 7\})}$ - $\underbrace{((< -00\,, 5 > \cup < 6,\ 12 >) \cap \{1, 7\})}$





$(< -00\,, 5 >\ \cup < 6,\ 12 >)\ \ - \{1, 7\}$

$< -00\,, 1 >\ \cup < 1,\ 5 > \cup\ (< 6, 7 >\ \cup < 7,\ 12 >$

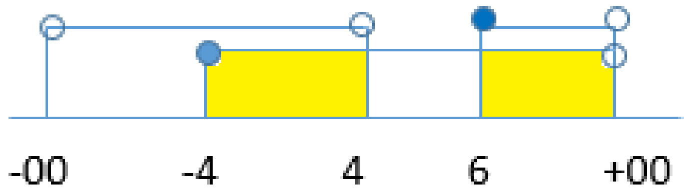
10. $\{\mathbf{C}(< -00\,, -4 > \cup\ [4,\ 6 >)\ \cup\ [-12, -6 >)\ \ \cup < -7,\ 5 >\} -$
$(< -00\,, 1]\ \cup\ [4,\ 8 >$

Solución:

$\mathbf{C}(< -00\,, -4 > \cup\ [4, 6 >)\ =\ \sim (< -00\,, -4 > \cup\ [4, 6 >)$

$\sim (x < -4\ \vee\ 4\ \leq x < 6)\ = (x\ \geq -4\ \ \wedge\ x\ \ < 4\ \vee\ x\ \geq 6)$

$[-4\,, +\infty > \cap\ (< -\infty\,, 4 > \cup\ \ [6\,, +\infty >)$



$([-4\,, 4 > \cup\ \ [6\,, +\infty >)$

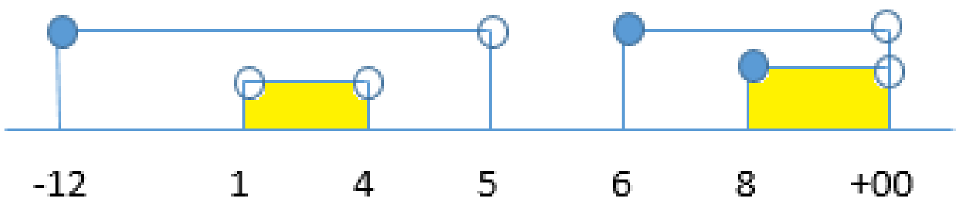
$[-12, -6 >)\ \ \cup \cap = \ [-12, 5 >$

$([-4\,, 4 > \cup [6\,, +\infty >) \cup [-12, 5 > = [-12, 5 > \cup [6\,, +\infty >$

$\{[-12, 5 > \cup [6\,, +\infty >\} - (< -00\,, 1]\ \cup\ [4,\ 8 >)$

$\{[-12, 5 > \cup [6\,, +\infty >\} \cap \mathbf{C}(< -00\,, 1]\ \cup\ [4,\ 8 >)$

$\{[-12, 5 > \cup [6\,, +\infty >\} \cap (< 1, 4 > \cup\ [8\,, +\infty >)$



$< 1, 4 > \cup\ [8\,, +\infty >)$

11. En un salón de clases hay un cierto número de estudiantes. Se sabe que cada uno de los estudiantes presente en aula estudia, al menos, una de las tres asignaturas siguientes: Matemática, física y química. De los cuales participan en los siguientes:

Matemáticas = 48

Física = 45

Química = 49

Matemática y física = 28

Matemática y química = 26

Física y química = 28

Las tres asignaturas = 18

Hallar:

a) ¿Cuántos estudiantes hay en el aula?

b) ¿Cuántos estudian matemáticas y física, pero no química?

c) ¿Cuántos estudian nada más que química?

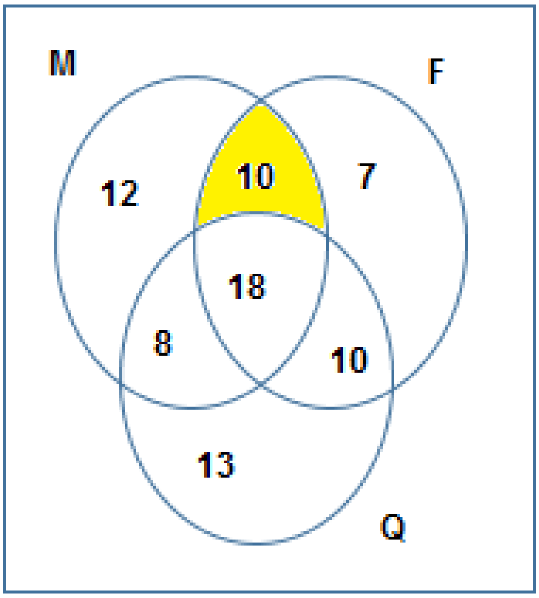
Solución:

a) $n(M \cup F \cup Q) = n(M) + n(F) + n(Q) - n(M \cap F) - n(M \cap Q) - n(F \cap Q) + n(M \cap F \cap Q)$

$n(M \cup F \cup Q) = 480 + 45 + 49 - 28 - 26 - 28 + 18$

$n(M \cup F \cup Q) = 78$; entonces hay 78 estudiantes

b) Para resolver esta pregunta vamos a graficar. Es conveniente saber, en este tipo de problemas, cual es la intersección de los tres conjuntos porque, una vez conocida esa intersección se forman con facilidad las otras regiones. En esta ocasión la intersección de los tres se encuentra como dato lo cual nos facilita la solución.



Entonces hay 10 estudiantes que estudian Matemáticas y Física, pero no estudian química.

c) Lo que estudian solo química son 13 estudiantes.

12. De 120 personas de UAP se obtuvo la información:

72 estudiantes estudian el curso A

64 estudiantes estudian el curso B

36 estudiantes estudian el curso C

12 estudiantes estudian los tres cursos

a) ¿Cuántos estudiantes estudian exclusivamente dos cursos?

b) ¿Cuántos estudiantes estudian como mínimo dos cursos?

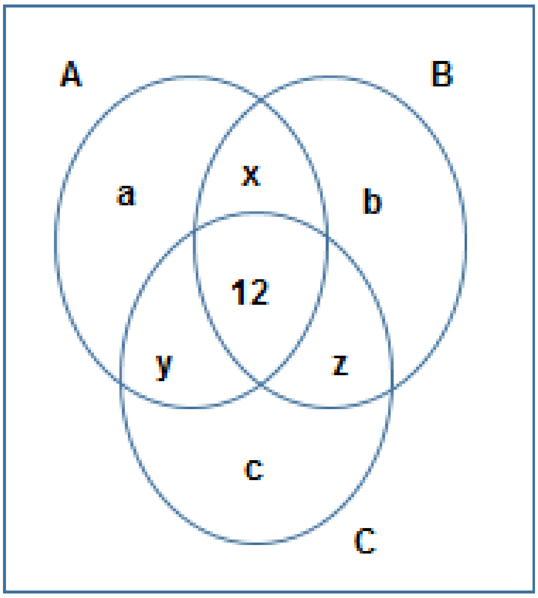
Solución:

n(A)= 72

n(B)= 64

n(C)= 36

$n(A \cap B \cap C) = 12$



a)

$a + y + x + 12 = 72$

$b + z + x + 12 = 64$

$c + y + z + 12 = 36$

$a + b + c + 2(x + y + z) = 136 \ldots (1)$

$a + b + c + (x + y + z) = 108 \ldots (2)$

Restamos el (1) y el (2)

$(x + y + z) = 28$

Hay 28 estudiantes que estudian exclusivamente dos cursos

b) Hay 40 estudiantes que estudian como mínimo 2 cursos

13. En una ciudad de 10.000 habitantes el 70% de las personas lee la revista A, el 40% leen la revista B y el 10% la revista C, entre los que leen la revista A el 30% lee la revista B y el 4% lee la revista C, el 90% de los que leen la revista C, lee la revista B, y solo el 2% de la población total lee la revista B, leen la revista C y leen la revista A se pide:

a) ¿Cuántos habitantes no leen la revista A, no lee la revista B ni la revista C?

b) ¿Cuántos habitantes leen solo la revista B?

Solución:

A = {revista A}

B = {revista B}

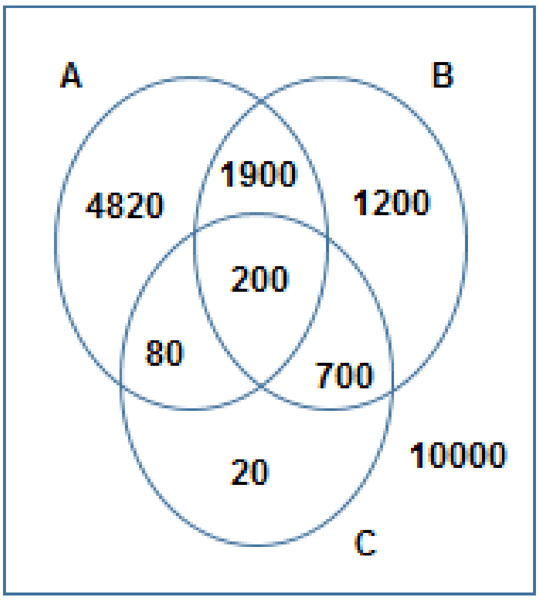
C = {revista C}

Personas que leen la revista A 70% de 10000 = 7000

Personas que leen la revista B 40% de 10000 = 4000

Personas que leen la revista C 10% de 10000 = 1000

Graficar:



a) Tenemos:

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) – n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$n(A \cup B \cup C) = 4820 + 1900 + 1200 + 700 + 200 + 80 + 20$

$n(A \cup B \cup C) = 8920$, además se conoce que $n(U) = 10000$

Los que no leen la revista B, no leen la revista A, ni leen la revista C. Estará dado por: $n(U) – n(A \cup B \cup C) = 10000 – 8920 = 1080$, es decir 1080 no leen ninguna de las tres revistas.

b) Según el diagrama , los que leen solamente la revista B son 1200

14. Se realizó una encuesta a 150 personas para conocer cuál es su bebida habitual, obteniéndose los siguientes resultados:

Personas que toman té = 40

Personas que toman café = 55

Personas que toman refresco = 67

Personas que toman te o café = 80

Personas que toman café o refresco = 95

Personas que toman té o refresco = 90

Personas que toman té y refresco pero no café = 10

a) ¿Cuantas personas no toman ninguna de las tres bebidas?

b) ¿Cuántas personas toman café y refresco, pero no té?

Solución:

$n(T \cup R) = n(T) + n(R) - n(T \cap R)$

$90 = 40 + 67 - n(T \cap R)$

$n(T \cap R) = 17$

Como ya tenemos 10, se pone la diferencia

$n(C \cup R) = n(C) + n(R) - n(C \cap R)$

$95 = 55 + 67 - n(C \cap R)$

$n(C \cap R) = 27$

Como se sabe que n(R) = 67 se pone la diferencia

$n(T \cup C) = n(T) + n(C) - n(T \cap C)$

$80 = 40 + 55 - n(T \cap C)$

$n(T \cap R) = 15$

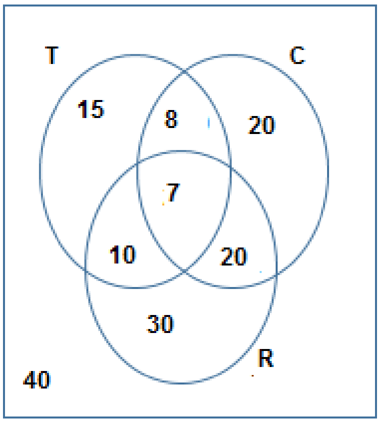
Como sabemos que n(T) = 40 se coloca la diferencia :

40 -10-7-8 = 15

Como sabemos que n(C) = 55 se coloca la diferencia:

55 -8-7-20 = 20

Para terminar se suma lo que hay dentro del grafico donde es 110, y afuera se pone la diferencia con respecto a 150



a) ¿Cuantas personas no toman ninguna de las tres bebidas?

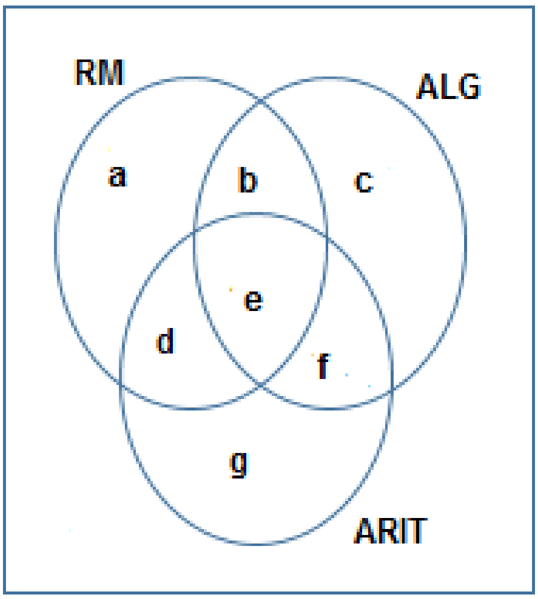
Son 40 personas que no toman ninguna bebida

b) ¿Cuántas personas toman café y refresco, pero no té?

Las personas que toman café y refresco pero no té son 20

15. De 180 estudiantes de la UNAB que gustan de los cursos razonamiento matemático, álgebra, aritmética, se sabe que: 1) 34 gustan de razonamiento matemático pero no de álgebra. 2) 28 gustan de razonamiento matemático pero no de aritmética. 3) 16 gustan álgebra pero no razonamiento matemático. 4) 24 gustan de álgebra pero no de aritmética .5) 48 gustan de aritmética pero no de razonamiento matemático. 6) 18 gustan de aritmética pero no de álgebra. ¿A cuántos jóvenes les gustan los tres cursos mencionados?

Solución:



$$\left.\begin{aligned}34 &= a + d\\ 28 &= a + b\\ 16 &= c + f\\ 24 &= b + c\\ 48 &= f + g\\ 18 &= d + g\end{aligned}\right\}$$

Sumamos todos los elementos

$168 = 2(a + b + c + d + f + g)$

$(a + b + c + d + g + f) = 84$ …. (1)

$180 = a + b + c + d + e + f + g$ …(2)

Reemplazamos (1) en (2)

$180 = 84 + e$

$e = 96$

A 96 estudiantes les gusta los tres cursos mencionados.

1.20. EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea U= {x ∈ N/x <7} el conjunto universal, siendo los subconjuntos de U, A= {x ∈ U/$x^3 \leq 8$}, B= {x ∈ U /x es múltiplo de 3}, C= {x ∈ U/ x^2 > 25}, D= {x ∈ U /x es par}.
Hallar: $B' - [(C' \cup D') - A]'$

2. Siendo Z el conjunto Universal y sean los conjuntos
A= {x∈ Z /x es número par}, B= {x ∈ Z/ x es un número primo},
C= {x ∈ Z / x es un cuadrado perfecto}. Hallar:
a) $A \cap B'$ b) $C - (B \cap A)$ c) $(A \cup B)' \cap C$

3. Sean U= {x ∈ N / 2 ≤ x ≤ 12}, A= {x ∈ U / x es impar, x ≠3}, B= {x ∈ U / 5 < x < 11}, C= {x ∈ U /x es múltiplo de 3},
Hallar: $(A' - B)' \Delta (B' \cup C)'$

4. Sean los conjuntos: $U = \{x \in N / x \leq 10\}$ $A = \{1,4,7,10\}$
$B = \{1,2,3,4,5\}$ $C = \{2,4,6,8\}$
Hallar: a) $B' \cap (C - A)$ b) $(A \cap B)' \cup C$
c) $(A \cup B)' \cap C$ d) $B \cap (C - A)'$

5. Dado los conjuntos $A = \{1, 2, 5, 7, 8\}$,$B = \{2, 3, 4, 7, 9\}$ $C = \{1, 3, 5, 6, 8\}$ y $U = \{x \in N / x \leq 9\}$.

Hallar:

a) $[(A \cup B) - (A \cap C)]$ b) $[(A \cap B) - (A \cup C)]$

c) $[(A - B) \cup (A - C)]'$ d) $[(A' - B) \cap (A - C)]'$

e) $[(C - B') - (A' \cup C)]$ f) $(A' - B') \Delta (B' \cup C')$

6. Se consideran los conjuntos $A = \langle -7, 3\rangle$, $B = [-2, 5\rangle$, $C = \langle -4, 9]$ y $D = [-1,8]$. Expresa cada intervalo por comprensión y calcula:

a) $A \cup B$ b) $A' \cap B$ c) $(B \cup C) \cap D$ d) $(B - A) \cup (C - D)$ e) $(A - B) \cap' (B - A)'$

7. Si $M = \{x \in N / x^3 \leq 30\}$, $N = \{x^2 \in N / x \leq 3\}$ y el universo es $U = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$. Hallar:

a) $(M \cap N)' - (M \cup N)'$

b) hacer un diagrama de Venn – Euler

8. Dados los conjuntos $A = \{2, 3, 5, 6, 8\}$ y $B = \{0, 1, 2, 4, 5,7, 9\}$ Si m es el número de subconjuntos no vacíos de A que son disjuntos con

B y n el número de subconjuntos no vacíos de B que son disjuntos con A. Hallar m + n.

9. Sea U= {x∈ N / $0 < x \leq 10$} y los subconjuntos A= {x∈ U / x es primo}, B= {x∈ U / x es cuadrado perfecto} , C= {x ∈ U / x es impar} .Hallar:

a) $(A \cup B)' - C$ b) $(A - C)' \cap B$

c) $(A \Delta B) - (A \Delta C)$ d) $(A \cap C)' - (B \cup C)'$

10. Dado los conjuntos A = {x ∈ Z / $\sim [x \leq -2 \vee x > 3]$},

B= {x ∈ N / $\sim (-1 < x \leq 3 \rightarrow x = 5)$} y

C= {x ∈ Z / $(x < -2 \vee x \geq 2) \rightarrow x > 1$}.

Hallar: $(B \cap C) \Delta (A \cap B)$

11. Sean los conjuntos A= {x ∈ N / $7 - x = 3 \vee x < 3$}, B= {x ∈ N / $5 - x > 2 \wedge 1/5\,(6x - 2) \geq 2$}. C= {x ∈ N / x cuadrado perfecto, $x \leq 10$}. Hallar:

a) $(A \cup B) \cap (C - A)$ b) $(A - B) \cup (B \cap C)$

c) $(A \cap B) - (A - C)$ d) $(A \Delta B) \cap (B \cap C)$

12. Determinar los conjuntos X e Y si se tiene que $X \Delta Y =$ $\{1, 2, 3, 4,5\}$, $X' = \{2, 3, 5,7\}$, $Y' = \{1,4,7\}$ siendo el universo $U= \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

13. Dado el conjunto universal $U= \{x \in N / x \leq 50\}$ y los subconjuntos:

$A= \{ \frac{x^2-1}{3} / x \in U \wedge x$ es Nº primo$\}$;

$B= \{ \frac{x^2+1}{3} / x \in U \wedge x$ es Nº impar$\}$

$C= \{ \frac{\sqrt{x-1}}{2} / x \in U \wedge x$ es Nº primo$\}$. Hallar:

a) $A \cap B$ b) $A \Delta B$ c) $A \Delta C$

d) $(A \Delta B) \Delta C'$ e) $(A \cup B) \Delta (A \cup C)$

14. Si se sabe que $p \Phi q \equiv p \rightarrow \sim q$; $p \Omega q \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$ y se dan los conjuntos:

$A = \{-9, \sqrt{2}\ , 0.\widehat{3}, \pi, 6, 3i\}$; $B= \{x \in A / x \in Z\ \Omega\ x \notin R \}$

$D= \{x \in A / x \in Q\ \Phi\ x \in I \}$, $E = \{x \in A / x \in C\ \Omega\ x \in N \}$

Hallar: $(A \cup B) \cap (D - E)$

15. Sea $U = \{x \in N / 0 < X \leq 10\}$ Y los subconjuntos

$A= \{x \in U / x$ es primo$\}$, $B= \{x \in U / x$ es cuadrado perfecto$\}$,

$C = \{x \in U / x$ es impar$\}$.Hallar:

a) $(A \cup B)' - C$ b) $(A - C)' \cap B$

c) $(A \cup B) - (A \cup C)$ d) $(A \cap C)' - (B \cup C)'$

16. Sea el conjunto universal $U = \{-3, \frac{-2}{3}, 0, \frac{1}{2}, 2, \sqrt{2}, 3 + \sqrt{2}, 2i\}$

$A = \{x \in U / x \in C \wedge x \in I\}$, $B = \{x \in U / x \in N' \wedge x \in Q\}$

$D = \{x \in U / x \in Z \vee x \in N\}$. Determinar $M \cap P$, por extensión, Si:

$M = \{x \in U / x \in A \rightarrow x \in B\}$;

$P = \{x \in U / x \in D \leftrightarrow x \in B\}$

17. Simplificar los siguientes conjuntos:

a) $(< -2,3] \cup < 0,4 >) - [2,6]$ b) $(< 0,4 > \cup < -2, 3]) - [2, 6]$

c) $(< -2, 3] \cup \mathbf{C}[2, 6]) \cup (< 0, 4> \cap [<-\infty,2> \cup < 6,+\infty>])$

18. Un club está constituido por 78 personas, de ellas 50 juegan futbol ,32 básquet y 23 vóley. Además 6 figuras en los tres deportes y 10 no practican ningún deporte .Si x es total de personas que practican exactamente un deporte, y es el total de personas que practican exactamente dos deporte. Hallar x- y.

19. De 120 personas de cierta universidad se obtuvo la información:

72 alumnos estudian el curso A

64 alumnos estudian el curso B

36 alumnos estudian el curso C

12 alumnos estudian los tres cursos.

¿Cuántos alumnos estudian exclusivamente dos cursos?

20. En el ensamblaje de autos de cierta planta han resultado 120 unidades con fallas, los fallas son de embrague, dirección y caja de cambios .Sabiendo que 68 fallan en el embrague por lo menos ,32 en la dirección por lo menos 40 fallan solamente en el embrague, 5 tienen fallas en embrague y dirección pero no en la caja de cambios, 17 tienen fallas en la dirección y caja de cambio pero no en el embrague.

¿Cuántos autos les falla solo la caja de cambios?

¿Cuántos autos tienen fallas en la caja de cambios por lo menos?

21. El número de personas que toman la bebida A es 190.

El número de personas que toman la bebida B es 110.

El número de personas que toman la bebida C e 150.

El número de personas que solo toman C es la mitad de las que solo toman B y 1/3 de los que solo toman A.

El número de personas que solo toman B y C es la mitad de los que solo toman A y B .Si el número de personas que toman las 3 bebidas es de 1/3 de los que solo toman A y C.
¿Cuántas personas toman una bebida solamente?

22. María tiene los siguientes datos, al comprar garbanzo, maíz y trigo:
El costo total de garbanzo es 22 dólares
El costo total de maíz es 20 dólares
El costo total de trigo es 38 dólares
Pero al recoger estos productos se mezclaron y se obtuvieron los siguientes datos:
El costo de solo garbanzo es ½ del costo de solo maíz y 1/3 del costo de solo trigo. Solo la mezcla de trigo y maíz costo el doble de solo maíz y garbanzo mezclado.
¿Cuál es el costo de los productos mezclados?

23. Si en una encuesta a 200 estudiantes se halló que:
68 prefieren matemáticas,
138 son inteligentes,
160 son estudiosos,

120 son estudiosos e inteligentes,

20 prefieren matemáticas y no son inteligentes,

13 prefieren matemáticas y no son estudiosos y

15 prefieren matemáticas y son estudiosos pero no son inteligentes.

Utilizando diagramas de venn, resolver lo siguiente:

¿Cuántos prefieren matemáticas, son estudioso y son inteligentes?

¿Cuántos son estudiosos e inteligentes pero no prefieren matemáticas?

¿Cuántos no prefieren matemáticas, ni son estudiosos, ni son inteligentes?

24. En una encuesta sobre preferencia de jugos de fruta de fresa, papaya y naranja, se encontró que: El número de personas que le gustan de jugo surtido de fruta es:

1/4 solamente jugo de fresa

1/2 solamente jugo papaya

1/5 solamente jugo naranja

1/2 solamente jugo fresa y naranja

1/3 solamente jugo papaya y naranja

Igual al número de personas que les gustan solamente de jugo de fresa y naranja 1/3 de las que no gustan de ninguno de os tres jugos señalados .si se sabe que el número de encuestados fue de 420, hallar:

a) Cuantas personas gustan solamente jugo de una sola de las frutas mencionadas.

b) Cuantas personas gustan al menos jugo surtido de dos de las frutas mencionadas.

25. De 320 personas consultadas acerca de sus actividades, se obtuvo el siguiente resultado: 40 personas se desenvuelven como carpinteros .El número de personas que realizan las tres actividades es el séxtuplo tanto de los que son solamente albañiles y bodegueros, como de los que solamente carpinteros y bodegueros, y es el triple de los que se desenvuelven solamente como albañiles y carpinteros. El número de personas que son solamente bodegueros es igual al número de carpinteros .El número de albañiles solamente es la mitad de los que realizan las tres actividades más 6 personas.14 personas declaran no participar en ninguna de las actividades señaladas .indicar a) Cuantas son solamente bodegueros? b) Cuantos son solamente albañiles ? c) Cuantos son carpinteros? d) Cuantos no son albañiles ni carpinteros?

26. En una encuesta realizada a 290 estudiantes de una Universidad sobre las marcas de cigarrillos que gustan fumar ,se obtuvo el siguiente resultado :140 estudiantes gustan fumar Ducal , 90 gustan fumar Premier y 115 gustan fumar Winston .El número de estudiantes que fuman las tres marcas de cigarrillos es 1/5 de los que fuman solo Ducal y 1/3 de los que fuman solo Premier .El número de estudiantes que solo fuma Ducal y Premier es 1/4 de los que fuman solo Winston .El número de estudiantes que solo fumas Premier y Winston es 1/2 de los que solo fuman Ducal y Winston. Determinar:

a) Cuantos estudiantes gustan fumar una sola marca de cigarrillos.

b) Cuantos prefieren fumar solo Ducal y Winston y solo Premier y Winston.

c) Cuantos estudiantes no gustan fumar ninguna de las 3 marcas de cigarros.

27. Se presentan 44 solicitudes para cubrir los puestos que ofrece la empresa que se cita en el anterior problema. De entre los solicitantes, hay 29 Ingenieros Mecánicos ,19 Ingenieros Químicos ,6 Ingenieros Mecánicos y Eléctricos ,8 Ingenieros

Químicos y Eléctricos ,9 Ingenieros Mecánicos y Químicos ,y 1 que tiene triple titulación ,es decir hay uno que es Ingeniero Mecánico y también Ingeniero Eléctrico y también Ingeniero Químico.

Se pregunta:

a) ¿Cuántos Ingenieros Eléctricos han presentado solicitud?

b) Exprésese en una tabla el número de Ingenieros que entran en la empresa y los que no entran.

28. Una empresa de servicios medioambientales va a ampliar su red comercial, y por ello necesita incorporar a 25 comerciales. La empresa requiere fundamentalmente personas que posean, al menos, una de las características siguientes.

a) Alguna experiencia en el área de ventas

b) Formación técnica

c) Conocimientos del inglés.

En concreto, la empresa ofrece 12 plazas para los de la característica a) 14 para los de la característica b) 11 plazas para los de la característica c) Ahora bien, la empresa quiere que 5 comerciales posean la característica c) Ahora bien, la empresa quiere que 5 comerciales posean la característica a) y

b) que 3 comerciales posean a) y c), y que 6 comerciales posean b) y c).

Se pregunta:

1) ¿Cuántos de esos 25 comerciales quiere la empresa que posean las tres características citadas?

2) ¿A cuántos comerciales se les exige nada más que la característica: tener conocimientos de inglés?

3) ¿Cuantos tienen alguna experiencia en ventas y tienen conocimientos de inglés, pero no tienen formación técnica?

4) ¿Cuántos comerciales tiene nada más que una de las características pedidas?

29. De 1000 televidentes encuestados se obtiene la siguiente información:

391 ven programas deportivos.

230 ven programas cómicos.

545 ven programas sobre el mundo animal.

98 ven programas cómicos y deportivos.

152 ven programas cómicos y mundo animal.

88 ven programas deportivos y mundo animal.

90 no ven ninguno de esos tres programas.

Se pregunta:

1) ¿Cuantos entrevistados ven los tres tipos de programas?
2) ¿Cuantos entrevistados ven solo uno de los tres tipos?

30. En una encuesta hecha a 100 personas sobre sus conocimientos de idiomas resultó lo siguiente: Hablan inglés 27; francés 22; italiano 12; inglés y francés 10; francés y alemán 9; inglés, francés y alemán 6; alemán e italiano 5; 19 hablan inglés pero no alemán; el número de los que hablan alemán es el triple de los que hablan únicamente francés; ninguno de los que hablan italiano hablan ni francés ni inglés.

Hallar el número de personas y expresarlo simbólicamente:

a) ¿Cuántos no hablan ninguno de los 4 idiomas?
b) ¿Cuántos hablan únicamente alemán?
c) ¿Cuántos saben al menos 2 idiomas?
d) ¿Cuántos saben italiano o francés pero no inglés?
e) ¿Cuántos no saben alemán y no saben inglés, pero saben francés?

CAPÍTULO II

2. LÓGICA PROPOSICONAL

2.1 Definición:

La lógica proposicional trata con sistemas lógicos que carecen de cuantificadores, o variables interpretables como entidades. En lógica proposicional si bien no hay signos para variables de tipo entidad, sí existen signos para variables proposicionales (es decir, que pueden ser interpretadas como proposiciones con un valor de verdad de definido), de ahí el nombre proposicional. La lógica proposicional incluye además de variables interpretables como proposiciones simples signos para conectivas lógicas, por lo que dentro de este tipo de lógica puede analizarse la lógica de proposiciones a partir de proposiciones, pero sin tener en cuenta la estructura interna de las proposiciones más simples.

2.2 Elementos de la Lógica Simbólica

a. **Enunciado:** Se denomina enunciado a toda frase u oración. Algunos enunciados indican expresiones imperativas, exclamativas, interrogativas, otros en cambio, pueden ser verdaderos o falsos.

Ejemplos: Son enunciados:

- ¿Qué hora es?
- ¡Arriba Perú!
- $2 + 5 = 7$
- La cordillera del Cóndor es peruano
- $5 > 9$

Los enunciados que matemáticamente tienen significado son aquellos que pueden ser considerados como verdaderos o falsos (proposiciones); algunos enunciados no son posibles afirmar si es verdadero o falso, como por ejemplo, las interrogantes, las exclamaciones o las preguntas.

b. Enunciado Abierto: Son aquellas oraciones que contienen variables sin especificar un valor determinado; no tienen la propiedad de verdadero o falso.

Ejemplos: Son enunciados abiertos:

- $X + 3 = 8$
- $x^2 + y^2 = 9$
- $Z + 4 > 8$

- Él tiene 25 años

Los enunciados que usan las palabras "él", "ella" son enunciados abiertos.

A los enunciados abiertos que contienen variables algebraicas se les denomina **función proposicional**, que tienen la propiedad de convertirse en proposiciones, al sustituirse la variable por una constante específica.

Ejemplo:

El enunciado abierto

$$x^2 + 1 = 5$$

Es una función proposicional, el cual se convierte en proposición cuando:

i. Para x = -3 (por ejemplo), se convierte en la proposición

$$(-3)^2 + 1 = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (F)$$

el cual tiene valor de verdad **Falsa**

ii. Para x = 2, entonces, será la proposición

$$(2)^2 + 1 = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (V)$$

el cual tiene valor de verdad **Verdadera**

c. **Variable:** Es una cantidad susceptible de variar en un determinado campo o recorrido, a las variables las representaremos por letras minúsculas x, y, z, p, q…… a estas variables se les da el nombre de variables indeterminadas.

Ejemplo:

i. **Y=** $\sqrt{\boldsymbol{x-5}}$ es un número real, si x es un número real que sea mayor o igual a 5. El campo o recorrido de x es $x \geq 5$

2.3 Conectivos Lógicos

Son expresiones que sirven para unir dos o más proposiciones, entre los más importantes tenemos: la conjunción, disyunción, implicación, bicondicional.

Nombre	**Expresión**	**Símbolo lógico**
conjunción	Y	$\wedge$
disyunción	O	$\vee$
implicación	Si,….entonces	$\rightarrow$
bicondicional	Si y solo si	$\leftrightarrow$
negación	No	$\sim$
contradicción	No equivalente	$\not\equiv$

2.4 Clases de Proposiciones Lógicas

a. **Proposiciones simples o atómicas.-** Es una proposición que no contiene ningún conectivo lógico.

   Ejemplos:

   - El triángulo es un polígono
   - 3 + 2 = 5

b. **Proposiciones compuestas o moleculares.-** Es una proposición que contiene al menos un conectivo.

Ejemplos:

- Si Juan va al cine, entonces tiene dinero
- Un triángulo es equiángulo si, y solo si es equilátero
- Marcos en ingeniero o Beatriz es profesora

2.5 Proposiciones Compuestas Básicas

Se clasifican en:

a. **Conjunción (∧).-** Se utiliza cuando se usa el termino de enlace "y". Además tiene significados como: si no, más, mas, aun cuando, aunque, también, igualmente, pero, sin embargo, además, a las vez, no obstante, tanto… como, a pesar de, etc.

Ejemplos:

i. La puerta es blanca **y** la ventana negra.

Si "la puerta es blanca = p" y "la ventana negra = q", simbólicamente se tiene:

$$\mathbf{p \wedge q}$$

ii. $\underbrace{2 + 2 = 4}_{p}$ **y** $\underbrace{5 + 7 = 12}_{q}$

$$p \quad \wedge \quad q$$

Una coma "," puede hacer también una conjunción. Por ejemplo:

iii. Algunos han nacido virtuosos**,** otros han conseguido la virtud **y** a otros les ha sido impuesta.

Simbólicamente:

Algunos han nacido virtuosos = p

Otros han conseguido la virtud = q

Otros les han sido impuestos = r

$$\mathbf{P \wedge q \wedge r}$$

En otros casos del lenguaje ordinario, la palabra "y" no indica conjunción o sea simplemente unión sino condición. Por ejemplo en la proposición:

iv. Paola tomo leche con limón y murió

Esta proposición no significa una simple unión sino una relación de causa a afecto (condicional).

Otro caso es cuando se da una relación entre elementos, ejemplo:

v. Andrés y Karla son hermanos

La relación se da entre Andrés y Karla lo que impide que se puedan descomponer.

Una regla practica para distinguir unos casos de otros es que se puedan separar y aplicar la ley conmutativa. Ejemplos: La casaca es nueva y la camisa es vieja.

Sheyla es artista y Marcela es deportista.

b. Disyunción débil (inclusiva o incluyente) (∨).- Es la operación que vincula proposiciones atómicos o moleculares, por medio de la conectiva "o". Indica dentro de la proposición que la ocurrencia de una de ellas no descarta la ocurrencia de la otra (cuando es posible que sus miembros componentes sean aceptados a la vez).

Ejemplos:

i. El veneno es mortal **o** dañino

El veneno es mortal = p

Dañino = q

$$\mathbf{p \vee q}$$

ii. $\underbrace{\text{Iremos de paseo}}_{\mathbf{p}}$ $\underset{\vee}{\textbf{o}}$ de $\underbrace{\text{campamento.}}_{\mathbf{q}}$

c. Disyunción fuerte (exclusiva o excluyente) (Δ).- Tiene como significado "O….o….", vincula dos proposiciones atómicas o moleculares. Indica dentro de una proposición molecular la ocurrencia de una de los hechos mas no la de ambos (cuando solo uno de sus miembros puede ser aceptado; el otro queda invalidado).

Ejemplos:

i. **O** $\underbrace{\text{Justin se encuentra en lima}}_{p}$ $\underset{\Delta}{\textbf{o}}$ $\underbrace{\text{se encuentra en Brasil}}_{q}$.

Simbolizando: Justin se encuentra en lima = p

Se encuentra en Brasil = q

$$\mathbf{p\ \Delta\ q}$$

ii. Mariátegui **o** nació en Lima **o** en Moquegua.

Simbolizando: Mariátegui nació en Lima = p

Mariátegui nació en Moquegua = q

p Δ **q**

iii. Alan García es presidente del país o congresista.

Simbolizando:

Alan García es presidente del país = p

Alan García es congresista del país = q

p Δ **q**

d. Condicionales (→)

♦ **Condicional directa (** $p \to q$ **).-** Cuando el antecedente es condición necesaria para que se pueda dar la consecuencia. La condicional directa se sirve de otras expresiones gramaticales para poder reconocerlas:

- Si **p, q** - Solo **p** si **q**
- Si **p** entonces **q** - **p** de ahí se sigue **q**
- **p** por consiguiente **q** - **p** así pues **q**
- **p** luego **q** - **p** se deduce **q**
- **p** de manera que **q** - Como **p, q**
- **p** de ahí que **q** - **p** de modo que **q**
- **p** por lo tanto **q** - Solo **p si q**
- **p** en consecuencia **q** - **p** se concluye **q**
- Cuando **p, q**
- Suponiendo que **p, q**

Ejemplos:

i. Si $\underbrace{\text{estudias}}_{\textbf{antecedente}}$ entonces $\underbrace{\text{apruebas}}_{\textbf{consecuente}}$

$$\mathbf{p} \quad \rightarrow \quad \mathbf{q}$$

ii. Si te vas entonces estaré triste

Simbolizando: Te vas = p

Estaré triste = q

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$$

♦ **Condicional indirecta ($q \rightarrow$ p).-** La posición del antecedente se encuentra invertido al igual que el consecuente. La condicional indirecta se sirve de otras expresiones gramaticales para poder reconocerlas:

- **p** cada vez **q**
- **p** dado que **q**
- **p** ya que **q**
- **p** puesto que **q**
- **p** porque **q**
- **p** si **q**
- **p** es una condición necesaria de **q**
- **p** suficiente que **q**
- **p** a condición de que **q**
- **p** en vista de que **q**
- **p** siempre que **q**
- **p** supone **q**
- **p** pues **q**

Ejemplos:

i. $\underbrace{\text{Iré de vacaciones}}_{\textbf{consecuente}}$ siempre que $\underbrace{\text{acabe con el trabajo}}_{\textbf{antecedente}}$

Simbolizando: Iré de vacaciones = **p**
Acabe con el trabajo **= q**
$q \rightarrow p$

Nota: Siempre el antecedente al simbolizar va primero es por eso que: $q \rightarrow p$

ii. $\underbrace{\text{Eres cantante}}_{\textbf{consecuente}}$ si $\underbrace{\text{tienes talento}}_{\textbf{antecedente}}$

Simbolizando: Eres cantante = **p**
Tienes talento **= q**
$q \rightarrow p$

e. Bicondicional ($\leftrightarrow$).- Esta representado por el "sí y solo si", en el lenguaje ordinario se pueden encontrar otras expresiones equivalentes como:

- Entonces y solo entonces
- Cuando y solo cuando
- Si y solamente si, etc.

Ejemplos:

i. Alfonso ingresara **si y solo si** estudia.

Simbolizando: Alfonso ingresara = **p**
Estudia **= q**
$p \leftrightarrow q$

ii. Todo número es par **si y solo** es divisible por 2

Simbolizando: Todo número es par = **p**
Es divisible por 2 **= q**

$$\mathbf{p \leftrightarrow q}$$

f. La negación (~).- No es un enlace lógico. Es un operador gonádico o singular que afecta a una proposición o conjunto de proposiciones. Tiene como significado: no, ni, nunca, no siempre, no es cierto que, es falso que, no ocurre que, es imposible que, no es que, no es el caso que, no es verdad que, etc.

Se clasifica:

- ♦ **Negación ligada.-** Cuando afecta a proposiciones simples utilizando generalmente la forma gramatical no

  Ejemplos:

i. Pedro **no** es deportista.

Simbolizando: Pedro es deportista = p

Pero como es negación: ~ **p**

ii. Vanessa **no** estudia computación.

Simbolizando: Vanessa estudia computación = p

Pero como es negación: ~ **p**

- **Negación libre.-** Cuando afecta o proposiciones compuestas. Sus formas gramaticales son: No es cierto que, no se da el caso que, es falso que, no es posible que, etc.

  Ejemplo:

  i. $\underbrace{\textbf{No es cierto que}}_{\sim}\ \underbrace{\text{vas al cine}}_{\mathbf{p}}\ \underset{\wedge}{\text{y}}\ \underbrace{\text{al teatro.}}_{\mathbf{q}}$

  Simbolizando: vas al cine = p

  al teatro = q

  Pero como es una negación libre = **∼ (p ∧ q)**

- **Binegación.-** Su forma gramatical es: el término "ni" se simboliza (∼p ∧ ∼q)

  Ejemplo:

  i. **Ni** Ángela **ni** Claudia van al teatro.

  Simbolizando: Ángela va al teatro = p

  Claudia va al teatro = q

  Pero cono es una binegaciòn "ni" = (∼p ∧ ∼q)

2.6 Simbolización de Proposiciones

i. **Definición.-**La simbolización de proposiciones, llamadas también **"formalización de proposiciones"**, es el proceso por el cual se representa las proposiciones y sus enlaces lógicos mediante variables y operadores proposicionales, de esta manera se genera una formula lógica.

ii. **Formula lógica.-** Son las combinaciones bien formadas de variables y operadores proposicionales, es decir, son esquemas lógicos resultantes que reemplazan simbólicamente las proposiciones y sus enlaces.

iii. **Variables proposicionales.-** Son letras minúsculas que representan las proposiciones simples. Se les puede asignar cualquier contenido: p, q, r,…z.

iv. **Operadores proposicionales.-** Se refiere a los enlaces lógicos que se hallan uniendo las proposiciones simples son constantes lógicas (conjunción, disyunción, bicondicional, condicional, negación).

Los operadores proposicionales pueden ser diádicos y monódicos. Es decir:

<table>
<tr><td rowspan="5">Operadores
Diádicos</td><td>…….y……..</td><td>$\wedge$</td></tr>
<tr><td>…….o…….</td><td>$\vee$</td></tr>
<tr><td>O…..o…….</td><td>$\ncong$, Δ, $\not\leftrightarrow$, $\veebar$</td></tr>
<tr><td>Si….entonces</td><td>$\rightarrow$, Ɔ</td></tr>
<tr><td>…si y solo sí..</td><td>$\equiv$, $\leftrightarrow$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Operador
Monàdico</td><td>No es cierto que</td><td rowspan="2">$\sim$, $\neg$</td></tr>
<tr><td>no</td></tr>
</table>

Ejemplo:

i. Si Angie llega a tiempo entonces no perderá el vuelo y disfrutara sus vacaciones.

Asignando variables proposicionales:

p = Angie llega a tiempo

q = Angie perderá el vuelo

r = Angie disfrutara sus vacaciones

Reemplazando:

Si **p** entonces $\sim$ **q** y **r**

Simbolizando: $\mathbf{p \rightarrow (\sim \mathit{q} \wedge r)}$

ii. Si Sheyla no trabaja hoy entonces Richard va a la biblioteca y Justin va a la biblioteca.

Asignando variables proposicionales:

p = Sheyla trabaja hoy

q = Richard va a la biblioteca

r = Justin va a la biblioteca

Reemplazando:

Si ~ **p** entonces **q** y **r**

Simbolizando: $\sim \mathbf{p} \rightarrow (\boldsymbol{q} \wedge \mathbf{r})$

Resumen General

Proposiciones compuestas	Formulas lógicas	Lectura
Conjuntiva	$p \wedge q$	p y q
Disyuntiva débil	$p \vee q$	p o q
Disyuntiva fuerte	$p \Delta q$	O p o q
Condicional	$p \rightarrow q$	Si p entonces q
Bicondicional	$p \leftrightarrow q$	p si y solo si q
Negación libre	$\sim(p \wedge q)$	No es cierto que p y q
Negación ligada	$\sim p$	No p

v. **Signos de agrupación.-** Se utilizan para agrupar a las variables y operadores, así como para darles jerarquía. Son los siguientes:

- **Barras | |**
- **Llaves { }**
- **Corchetes [ ]**
- **Paréntesis ( )**

a. **Jerarquización.-** Jerarquizar significa agrupar las variables y los operadores dentro de los signos de colección, llamados también de agrupación.

Para jerarquizar hay que tener en cuenta los siguientes requisitos:

- ✓ Solo presentan jerarquía los conectivos lógicos (y, o, entonces, si y solo sí).

- ✓ Para realizar una correcta jerarquización hay que tener en cuenta los signos de puntuación del texto a jerarquizar, por cuanto ellos indican la ubicación de los signos de colección.

- ✓ En el texto, el punto seguido tiene mayor jerarquía, le sigue en segundo lugar el punto y coma, y en tercer lugar la coma.

b. Reglas para jerarquizar.

- ✓ Donde esté ubicado el signo de puntuación más importante del texto (de mayor jerarquía), **ahí se encuentra ubicado el conectivo principal.**
- ✓ Donde se encuentre un signo de puntuación ahí se abre o cierra un signo de colección (paréntesis, corchete o llave).
- ✓ El conectivo que se encuentra fuera o en la parte más externa de los signos de colección es el que tiene mayor jerarquía.
- ✓ Si encontramos un texto donde se presente una sucesión de idénticos signos de puntuación, será mayor el que presente como conectivo entonces, luego o cualquiera de sus sinónimos.
- ✓ La negación antecede a la variable (∼p), no enlaza proposiciones, pues no es conectivo.

Ejemplo

i) $\underbrace{\text{Yolanda estudia biología}}_{\mathbf{p}}$ y $\underbrace{\text{anatomía}}_{\mathbf{q}}$**,** o $\underbrace{\text{estudia matemática}}_{\mathbf{r}}$**.** Sin embargo $\underbrace{\text{estudia física}}_{\mathbf{s}}$.

Reemplazando proposiciones = p y q**,** o r**.** sin embrago s

Reemplazando conectivos = p ∧ q **,** ∨ r **.** ∧ s

jerarquía 1 jerarquía 2

mayor jerarquía

Jerarquizando la simbolización = **[(p** ∧ **q)** ∨ **r]** ∧ **s**

Conectivo principal

ii. Si luchamos y nos esforzamos, entonces ganaremos el partido del sábado. Por lo tanto, nos llevaremos la copa de los campeones.

Asignando variables proposicionales:

p = luchamos

q = nos esforzamos

r = ganamos el partido del sábado

s = nos llevaremos la copa de los campeones

Reemplazando proposiciones:

Si p y q**,** entonces r**.** Por lo tanto s

Reemplazando conectivos = $p \wedge q$ **,** $\rightarrow$ r **.** $\rightarrow$ s

Jerarquía 1 jerarquía 2

Mayor jerarquía

Jerarquizando la simbolización = $\mathbf{[\,(p \wedge q) \rightarrow r\,] \rightarrow s}$

Conectivo principal

2.7. Ejercicios desarrollados

Simbolizar las siguientes proposiciones:

i. Si hay lluvias en la sierra y el gobierno distribuye abono, entonces la producción agrícola crecerá.

Solución:

Primero, asignando variables a cada una de las proposiciones simples se tiene:

p = hay lluvias en la sierra

q = el gobierno distribuye abono

r = la producción agrícola crecerá.

Luego, obteniendo la estructura formal de la proposición, donde solo aparecen los términos de enlace y las variables proposicionales, se tiene:

Si (…p..y…q…), entonces (…r..)

Finalmente, simbolizando:

$(p \wedge q) \rightarrow r$

ii. Aunque llueva iré a visitarte

Solución:

p = llueve

q = iré a visitarte

$(p \vee \sim p) \rightarrow q$

En este caso, “aunque” indica llueva o no lleva, iré a visitarte. También puede interpretarse así:

$(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow q)$

iii. Aunque severo, es justo

Solución:

p = es severo

q = es justo

$p \wedge q$

iv. El avión despegara a las 5 de la mañana a menos que la neblina cubra el aeropuerto.

p = El avión despegara a las 5 de la mañana

q = la neblina cubre el aeropuerto

$p \vee q$

También se puede simbolizar así: $(\sim q \rightarrow p)$

O de esta otra forma **$(\sim p \rightarrow q)$**

v. Cuando la ambición por el poder o la riqueza domina al hombre, no hay pudor ni barreras legales ni morales inviolables.

Solución:

p = la ambición por el poder

q = la ambición por la riqueza

r = hay pudor

s = hay barreras legales

t = hay morales inviolables

$(p \vee q) \rightarrow (\sim \mathbf{r} \wedge \sim \mathbf{s} \wedge \sim \mathbf{t})$

vi. Si todos mis esfuerzos no han sido inútiles, y lo he logrado, lo sabré dentro de un momento, si a dios le place

Solución:

p = todos mis esfuerzos han sido inútiles

q = lo logre

r = lo sabré dentro de un momento

s = a dios le place

$p \rightarrow [(\sim \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}) \rightarrow \mathbf{s}]$

vii. Lo hare, pero más tarde.

Solución:

p = lo hice

q = pero más tarde

$\sim \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$

viii. El juez castiga el crimen sin corregir al delincuente.

Solución:

p = el juez castiga el crimen

q = corrigió al delincuente

$\mathbf{p} \wedge \sim \mathbf{q}$

ix. El guardián no se rinde, vence o muere.

p = el guardián se rinde

q = el guardián vence

r = el guardián muere

$\mathbf{\sim p \rightarrow (q \vee r)}$

x. Si eres paciente y justo y tiendes a realizar cualquier cosa que te propones, aunque sea tarde dios llega.

Solución:

p = eres paciente

q = eres justo

r = tiendes a realizar cualquier cosa

s = que te propones

t = sea tarde

u = Dios llega

$\mathbf{[p \wedge q \wedge (r \rightarrow s)] \rightarrow [(t \vee \sim t) \rightarrow u]}$

xi. No es cierto que seas mujer y hombre, ya que eres hombre. Por lo tanto no eres mujer.

Solución:

$[q \rightarrow \mathbf{\sim (p \wedge q)}] \rightarrow \mathbf{\sim p}$

xii. Si llueve al medio día, no secara la ropa; si no llueve, secara y te iras a la fiesta. Por lo tanto, si vas a la fiesta, no llovió.

Solución:

p = llueve al medio día

q = secara la ropa

r = te iras a la fiesta

$\{ (p \rightarrow \sim q) \wedge [\sim \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{(q \wedge r)]} \} \rightarrow (r \rightarrow \sim \mathbf{p)}$

xiii. Judas es desleal y deshonesto porque no dijo la verdad a Jesús y lo entrego a los judíos; de ahí que ya no es una persona de confianza.

Solución:

p = Judas es desleal

q = judas es deshonesto

r = dijo la verdad a Jesús

s = lo entregó a los judíos

t = es una persona de confianza

$[(\sim \mathbf{r} \wedge \mathbf{s}\ \mathbf{)} \rightarrow \mathbf{(\sim p} \wedge \sim \mathbf{q}\ \mathbf{)}] \rightarrow \mathbf{\sim t}$

xiv. Richard y Justin estudian en salones contiguos.

Solución: p

xv. La lógica es una ciencia formal o fáctica. Además, si es una ciencia formal, es exacta; asimismo está relacionada con la matemática. Por lo tanto, es necesario que los estudiantes de la UNSACA lo aprendan.

Solución:

p = la lógica es una ciencia formal

q = la lógica es una ciencia fáctica

r = La lógica es una ciencia exacta

s = está relacionada con la matemática

t = es necesario que los estudiantes de la UNSACA lo aprendan

$\{ (p \Delta q) \wedge [(p \rightarrow r) \wedge s] \} \rightarrow t$

xvi. Mi madre me alaga únicamente si puedo sentirme orgulloso de mi mismo. O soy un buen deportista o no puedo estar orgulloso de mi mismo, Si estudio intensamente entonces no puedo ser un buen deportista. Por lo tanto si mi madre me alaga entonces no estudio intensamente.

Solución:

p = Mi madre me alaga

q = sentirme orgulloso de mi mismo

r = soy un buen deportista

s = estudio intensamente

$[(q \rightarrow p) \wedge (r \Delta \sim q) \wedge (s \rightarrow \sim r)] \rightarrow (p \rightarrow \sim s)$

xvii. Los helados son caros, si y solo si o se venden en las fiestas o se venden en las playas. Si hace mucho frio entonces los helados no son caros, y si los helados no son dulces entonces no se venden en las fiestas. Pero, no es el caso que no haga mucho frio y los helados sean dulces. Por lo tanto, los helados o se venden en las fiestas o no se venden en las playas.

Solución:

p = Los helados son caros

q = se venden en las fiestas

r = se venden en las playas

s = hace mucho frio

t = los helados son dulces

$\{ [p \leftrightarrow (q \Delta r)] \wedge [(s \rightarrow \sim p) \wedge (\sim t \rightarrow \sim q)] \wedge \sim (\sim s \wedge t)\} \rightarrow (q \Delta \sim r)$

xviii. Si tuvieran que justificarse ciertos hechos por su enorme tradición entonces, si estos hechos son inofensivos y respetan a todo ser viviente y al medio ambiente, no habría ningún problema. Pero si los hechos no son inofensivos o no respetuosos con los seres vivientes o el medio ambiente, entonces habría que dejar de justificarlos o no podríamos considerarnos dignos de nuestro tiempo.

Solución:

p = justificar hechos por su tradición.

q = ser inofensivo.

r = ser respetuoso con los seres vivos.

s = ser respetuoso con el medio ambiente.

t = tener problemas.

u = ser digno de nuestro tiempo.

$\mathbf{p \rightarrow [(q \wedge r \wedge s) \rightarrow \sim t] \wedge [(\sim q \vee \sim (r \vee s) \rightarrow (\sim p \vee \sim u)]}$

xix. No es el caso que Richard vote en las elecciones y los candidatos no conozcan los problemas de la realidad; dado que, Richard votara en las elecciones. Si y solo si los candidatos no son idealistas y conocen los problemas de la realidad.

Solución:

p = Richard vote en las elecciones

q = candidatos conocen los problemas de la realidad.

r = los candidatos son idealistas

$[p \leftrightarrow (\sim r \wedge q)] \rightarrow \sim (p \wedge \sim q)$

xx. Puedo dudar de todo pero no puedo dudar que estoy dudando; sin duda pienso, y si pienso, entonces existo; por lo tanto, existo porque pienso.

Solución:

p = puedo dudar de todo

q = puedo dudar que estoy dudando

r = sin duda pienso

s = existo

$\{ (p \wedge \sim q) \wedge [r \vee (r \rightarrow s)] \} \rightarrow (r \rightarrow s)$

xxi. La filosofía es reflexiva y critica. Además, si sirve para transformar la realidad, es útil para la sociedad peruana; más aún, si estamos aprendiendo a filosofar es porque actualmente se le está dando mayor importancia al curso de filosofía.

Solución:

p = la filosofía es reflexiva

q = la filosofía es critica

r = sirve para transformar la realidad

s = es útil para la sociedad peruana

t = estamos aprendiendo a filosofar

u = actualmente se le está dando mayor importancia al curso de filosofía.

$(p \wedge q) \wedge [(r \rightarrow s) \wedge (u \rightarrow t)]$

xxii. El escritor es sensible ya que es enamoradizo, pues es sensible.

Solución:

p = el escritor es sensible

q = es enamoradizo

$p \rightarrow (q \rightarrow p)$

xxiii. La aguja de la brújula gira en vista de que la embarcación ha cambiado de rumbo, y la embarcación ha cambiado de rumbo dado que hay tormenta en alta mar.

Solución:

p = la aguja de la brújula

q = la embarcación ha cambiado de rumbo

r = hay tormenta en alta mar

$(q \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow q)$

xxiv. Si un animal fabuloso se enfada, te quedas paralizado del susto; y si te quedas paralizado del susto, entonces no puedes sino apelar a su bondad y así no ser engullido. Por lo tanto, si un animal fabuloso se enfada, tendrás que apelar a su bondad o serás engullido.

Solución:

p = se enfada un animal fabuloso

q = quedarse paralizado del susto

r = apelar a su bondad

s = ser engullido

$\{(p \rightarrow q) \wedge [q \rightarrow (r \wedge \sim s)]\} \rightarrow [p \rightarrow (r \vee s)]$

xxv. Si la tormenta continúa o anochece, nos quedaremos a cenar o a dormir. Si nos quedamos a cenar o a dormir, no iremos mañana al concierto. Pero sí iremos mañana al concierto. Así pues, la tormenta no continúa.

Solución:

p = la tormenta continúa

q = anochece

r = nos quedaremos a cenar

s = nos quedamos a dormir

t = iremos mañana al concierto

$\{[(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)] \wedge [(r \vee s) \rightarrow \sim t] \wedge t\} \rightarrow \sim p$

xxvi. Si un triángulo tiene tres ángulos, un cuadrado tiene cuatro ángulos rectos. Un triángulo tiene tres ángulos y su suma vale dos ángulos rectos. Si los rombos tienen cuatro ángulos rectos, los cuadrados no tienen cuatro ángulos rectos. Por tanto los rombos no tienen cuatro ángulos rectos.

Solución:

p = un triángulo tiene tres ángulos

q = un cuadrado tiene cuatro ángulos rectos

r = su suma vale dos ángulos rectos

s = los rombos tienen cuatro ángulos rectos

$[(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge r) \wedge (s \rightarrow \sim q)] \rightarrow \sim s$

xxvii. Si no es cierto que se puede ser rico y dichoso a la vez, entonces la vida está llena de frustraciones y no es un camino de rosas. Si se es feliz, no se puede tener todo. Por consiguiente, la vida está llena de frustraciones.

Solución:

p = se puede ser rico

q = se puede ser dichoso

r = la vida está llena de frustraciones

s = es un camino de rosas

$\{ [\sim (p \wedge q) \rightarrow (r \wedge \sim s)] \wedge (q \rightarrow \sim p) \} \rightarrow r$

xxviii. La vida no tiene cosas así de fuertes o yo te puedo contar cómo es una llama por dentro. Si yo te puedo contar cómo es una llama por dentro, entonces pienso entregarte mi tiempo y pienso entregarte mi fe. No es cierto que piense entregarte mi tiempo y piense entregarte mi fe. Por lo tanto, la vida no tiene cosas así de fuertes.

Solución:

p = tener la vida cosas así de fuertes.

q = contar cómo es una llama por dentro

r = entregarte mi tiempo

s = entregarte mi fe

$$\{(\sim p \vee q) \wedge [q \rightarrow (r \wedge s)] \wedge \sim(r \wedge s) \} \rightarrow \sim p$$

xxix. Aprobaré lógica, si Dios quiere. Aprobaré lógica si y sólo si estudio y hago todos los ejercicios. Sin embargo, no he hecho los ejercicios, así que Dios no quiere que apruebe lógica.

Solución:

p = aprobaré lógica

q = Dios quiere que apruebe lógica

r = estudio

s = hago todos los ejercicios

$$[(q \rightarrow p) \wedge [p \leftrightarrow (r \wedge s)] \wedge \sim s] \rightarrow \sim q$$

xxx. Si el euro está fuerte, el petróleo está barato pero las exportaciones resultan caras. Si Europa se endeuda o la economía no crece, el petróleo no estará barato. La economía crece si y sólo si ni las exportaciones resultan caras ni la inflación aumenta. Por tanto, si la inflación aumenta, el euro no está fuerte.

Solución:

p = euro está fuerte

q = petróleo está barato

r = exportaciones caras

s = E se endeuda

t = economía crece

u = inflación aumenta

$([p \rightarrow (q \wedge r)] \wedge [(s \vee \sim t) \rightarrow \sim q] \wedge [t \leftrightarrow (\sim q \wedge \sim u)]) \rightarrow (u \rightarrow \sim p)$

xxxi. Habrá inflación, a menos que se moderen los precios y los salarios. Siempre que se moderan los salarios pero no los precios, si el Gobierno no interviene ocurre que el consumo interno disminuye y la economía se ralentiza. Por tanto, cuando no se moderan los precios, es necesario que el Gobierno intervenga para que la economía no se ralentice.

Solución:

p = hay inflación

q = moderan precios

r = moderan salarios

s = gobierno interviene

t = consumo disminuye

u = economía ralentiza

$([p \vee (q \wedge r)] \wedge [(r \wedge \sim q) \rightarrow (\sim s \rightarrow (t \wedge u))]) \rightarrow [\sim q \rightarrow (\sim s \rightarrow u)]$

xxxii. Si dos o más elementos se unen químicamente para formar una nueva sustancia, entonces el producto se denomina un compuesto.

Solución:

p = dos o más elementos se unen químicamente

q = forman una nueva sustancia

r = producto se denomina un compuesto

$(p \wedge q) \rightarrow r$

2.8. Ejercicios Propuestos:

Simbolice cada una de las siguientes proposiciones:

i. El escritor es sensible ya que es enamoradizo, pues es sensible.

ii. Cuando la Luna brillaba una noche en primavera, Gustavo escribió un poema, sin embargo el poema de Gustavo no es romántico.

iii. No es cierto que seas mujer y hombre, ya que eres hombre. Por lo tanto no eres mujer.

iv. Puedo dudar de todo pero no puedo dudar que estoy dudando; sin duda pienso, y si pienso, entonces existo; por lo tanto, existo porque pienso.

v. Si dos o más elementos se unen químicamente para formar una nueva sustancia, entonces el producto se denomina un compuesto.

vi. Subirá el precio del pan porque subió el precio de la gasolina, en vista de que si subió el precio de la gasolina, el gobierno no puede controlar la inflación.

vii. No es el caso que si Cristina no estudiaba abogacía no habría podido contraer matrimonio, dado que Cristina no ha podido contraer matrimonio porque preside la administración de una empresa.

viii. La lógica es una Ciencia formal o fáctica. Además, si es una ciencia formal, es exacta; asimismo está relacionada con la matemática. Por lo tanto, es necesario que los estudiantes de la UAP lo aprendan.

ix. No se hubieran producido tantas muertes en el accidente, si se hubiera cumplido con tomar las precauciones del caso y los bomberos hubieran estado mejor equipados.

x. La filosofía es reflexiva y critica. Además, si sirve para transformar la realidad, es útil para la sociedad peruana; más aún, si estamos aprendiendo a filosofar es porque actualmente se le está dando mayor importancia al curso de filosofía.

xi. La aguja de la brújula gira en vista de que la embarcación ha cambiado de rumbo, y la embarcación ha cambiado de rumbo dado que hay tormenta en alta mar.

xii. Si llueve al mediodía, no secara la ropa; si no llueve, secara y te iras a la fiesta. Por lo tanto, si vas a la fiesta, no llovió.

xiii. Cuando el cielo no está nublado, silba el viento y los pajarillos cantan.

xiv. Aunque sus discursos eran siempre débiles, decidía siempre con vigor y justicia; sin embargo, cuando se enfrentaba en una polémica, solía vencer fácilmente a su interlocutor.

xv. Aunque el dólar no suba de precio, la moneda peruana se devalúa; sin embargo, aunque la moneda peruana no se devalúa, los artículos de primera necesidad suben de precio.

xvi. Si la historia es una ciencia social o una ciencia fáctica, entonces o es objetiva o es subjetiva.

xvii. El producto marginal crece cada vez que el producto total crece, lo que significa que el resultado de los rendimientos es creciente; a menos que, el producto total crezca porque el gobierno hizo una emisión inorgánica.

xviii. Mi madre me alaga únicamente si puedo sentirme orgulloso de mi mismo. O soy un buen deportista o no puedo estar orgulloso de mi mismo. Si estudio intensamente entonces no puedo ser un buen deportista. Por lo tanto si mi madre me alaga entonces no estudio intensamente.

xix. Erika se sienta entre Carlos y Joel, en cambio Maribel está sentada entre Joel y Janeth.

xx. No es el caso que Richard vote en las elecciones y los candidatos no conozcan los problemas de la realidad; dado que, Richard votara en las elecciones. Si y solo si los candidatos no son idealistas y conocen los problemas de la realidad

2.9. LAS TABLAS DE VERDAD

Son cuadros de doble entrada que nos permiten determinar el valor de verdad del esquema molecular considerando las posibles combinaciones entre los valores de verdad de las variables que la componen y en base a la regla del conectivo correspondiente.

Con la tabla de verdad podemos hallar la matriz principal que define el esquema molecular, empleando para ello las funciones veritativas de los conectivos.

Veamos la tabla de verdad y que es lo que contiene:

Variables proposicionales	**Esquema lógica**	Superior
Combinaciones De V y/o F de las variables	Valores de los conectivos (matrices)	Inferior
Margen	Cuerpo	

1) Ejemplo:

p	q	(p	∨	q)	→	p
V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	F
F	F	F	F	F	V	F

Observación:

El número de combinaciones se obtiene con la formula (2^n). Donde la base representa el número constante de valores (verdad y falsedad) y el exponente el número de variables que tiene el esquema.

2) Ejemplo:

(p ∧ p) será 2^1 = 2 combinaciones

(p ∧ q) será 2^2 = 4 combinaciones

[(p ∧ q) → r] será 2^3 = 8 combinaciones

2.9. 1. Funciones Veritativas de los Conectivos

C. **Conjunción:** Es verdadera únicamente si los dos componentes son verdaderos y en cualquier otro caso es falsa.

1) Ejemplo:

$\underbrace{\text{Marcos es un estudiante aplicado}}_{\mathbf{p}}$ y $\underbrace{\text{humilde}}_{\mathbf{q}}$

p	q	(p	$\wedge$	q)
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	F	F	F

Matriz

B. Disyunción débil o inclusiva: Es verdadera cuando por lo menos una de las proposiciones componentes es verdadera, y falsa solo si las dos son falsas.

2) Ejemplo:

El $\underbrace{\text{catedrático enseña lógica}}_{p}$ o $\underbrace{\text{matemática}}_{q}$.

p	q	(p	$\vee$	q)
V	V	V	V	V
V	F	V	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	F

C. Disyunción fuerte exclusiva: Es falsa cuando los dos componentes tienen igual valor veritativo y es verdadero cuando tienen diferente valor veritativo.

3) Ejemplo:

O $\underbrace{\text{Richard es materialista}}_{p}$ o $\underbrace{\text{es idealista}}_{q}$.

p	q	(p	Δ	q)
V	V	V	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	F

D. Condicional: Es falsa solo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, siendo verdadera en todos los otros casos.

4) Ejemplo:

Si $\underbrace{\text{Sheyla estudia lógica,}}_{p}$

$\underbrace{\text{obtendrá una nota sobresaliente en el examen.}}_{q}$

p	q	(p	→	q)
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	F

E. Bicondicional: Es verdadera cuando las dos proposiciones componentes tienen el mismo valor veritativo y falsa en otros casos.

5) Ejemplo:

$\underbrace{\text{Seré cachimbo}}_{p}$ si y solo si $\underbrace{\text{ingreso a la universidad.}}_{q}$

p	q	(p	↔	q)
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	F	V	F

F. Negación: Si una proposición es verdadera, su negación será falsa; y si es falsa, su negación será verdadera.

Ejemplo: $\underbrace{\text{La lógica no es difícil}}_{P}$.

p	~ p
V	F
F	V

2.9. 2. Evaluación de Esquemas moleculares por Tablas de verdad

Consiste en obtener los valores del operador principal a partir de los valores de V o F de cada uno de sus otros componentes (variables y/o constantes). A los valores asi obtenidos en dicho operador principal se les denomina matriz principal.

2.9.3. Jerarquía de los Conectivos Lógicos

Cuando en una proposición compuesta se tienen varios conectivos lógicos, las operaciones se realizan luego de colocar los paréntesis adecuadamente comenzando con las proposiciones que se encuentran dentro de los paréntesis interiores. Siguen todas las negaciones y luego se avanza de izquierda a derecha. Los corchetes son considerados como paréntesis.

Nota: Si al formalizar no queda claro cuál es el conectivo dominante, se debe utilizar la siguiente convención:

De mayor jerarquía: $\leftrightarrow$, Δ, $\rightarrow$, $\vee$ $\wedge$, ~. Menor jerarquía

1) Ejemplo:

Evaluar el valor de verdad del siguiente esquema molecular

$[\, p \vee (q \rightarrow \sim r) \,] \wedge [\, (\sim p \vee r) \leftrightarrow \sim q \,]$

Solución:

p	q	r	[p	∨	(q	→	~ r)]	∧	[(~ p	∨	r)	↔	~ q]
V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V	V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V	V	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F	V	V

Matriz principal

2.9.4. Clasificación de los Esquemas Moleculares

Según el resultado obtenido en el operador principal (matriz principal), los esquemas moleculares se clasifican en:

a. Tautología.- Cuando los valores de la matriz principal son todos verdaderos.

1) Ejemplo: $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$

Solución:

p	q	r	[(p	→	q)	^	(q	→	r)]	→	(p	→	r)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	F	F	**V**	V	F	F
V	F	V	V	F	F	F	F	V	V	**V**	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	**V**	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	**V**	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	**V**	F	V	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	**V**	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	**V**	F	V	F

b. Contradicciones.- Cuando los valores de la matriz principal son todos falsos

2) Ejemplo: $[\, p \leftrightarrow (\, q \wedge r\,)\,] \wedge [\,(\, q \to \sim r\,) \leftrightarrow p]$

Solución:

p	q	r	[p	↔	(q	∧	r)]	∧	[(q	→	~ r)	↔	p)
V	V	V	V	V	V	V	**F**	**F**	V	**F**	F	F	V
V	V	F	V	F	V	F	V	**F**	F	V	V	V	F
V	F	V	V	F	F	F	F	**F**	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V	**F**	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V	F	**F**	V	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V	**F**	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	F	F	**F**	V	V	F	F	V
F	F	F	F	V	F	F	V	**F**	F	V	V	F	F

c. **Contingencia.-** Cuando en la matriz principal hay por lo menos una verdad y una falsedad.

3) Ejemplo: $(p \Delta q) \wedge (\sim p \vee p)$

Solución:

p	q	(p	Δ	q)	∧	(~ p	∨	p)
V	V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	V	V	F

2.9.5. El Método de las Tablas Abreviadas

Por el método de las tablas abreviadas podemos averiguar si la formula proposicional "A" es tautología, contradictoria o contingente. Especialmente nos interesa averiguar si la formula "A" es válida o invalida; para ello requerimos saber si "A" es o no una tautología. Para averiguar si "A" es o no una tautología, el método abreviado indica partir de una hipótesis falsa (F) de "A", porque probamos que existe por lo menos una interpretación F en "A", habremos demostrado que la hipótesis es verdadera (V); es decir, que "A" es F por lo menos es una opción. Luego, podemos afirmar: "A" no es una tautología. En términos más exactos, y dado que el tipo de prueba que estamos manejando es la del absurdo, al suponer que "A" es F y verificarse este supuesto como V habremos determinado que "A" no es una tautología. De la misma forma, si verificamos que la hipótesis no es cierta, esto es, que no es cierto que "A" sea F en alguna interpretación, entonces habremos probado que "A" es una tautología.

El procedimiento algorítmico para determinar si una formula proposicional "A" **es o no una tautología** debe seguir las siguientes reglas:

a. Probar si es Tautología

i. Asignar el valor F en el operador principal de la formula A según su respectiva función veritativa.

ii. Obtener el valor V o F de cada una de las variables de A, de preferencia aplicando las reglas de los operadores que dan como resultado una solo opción.

iii. Reiterar el valor de una variable si esta se repite en A, preservando el valor del operador donde se va a aplicar la regla.

iv. Si al aplicar la regla veritativa a algún operador de A, esta tiene más de una opción para obtener su valor, desarrollar cada una de ellas si y solo si en cada opción se genera una contradicción.

v. Si en una misma línea cada una de las variables de A tiene el mismo valor veritativo funcional, la hipótesis es cierta en esa línea.

vi. Si en una misma línea una variable tiene los valores V y F a la vez, la hipótesis F de A no es cierta en esa línea.

Se presentan algunos ejemplos sobre la aplicación de las reglas del método abreviado:

1. $[(p \leftrightarrow q) \wedge r] \rightarrow (r \rightarrow p)$

Aplicando "**i**", se asigna el valor F al operador principal. Luego según la función veritativa de "→" que es F solo cuando el antecedente es V y el consecuente es F, se sigue:

$$\begin{array}{ccccccccccc} [& (p & \leftrightarrow & q) & \wedge & r] & \rightarrow & (r & \rightarrow & p) \\ & & & & & & & & & \\ \end{array}$$

$$\text{V} \quad \text{F} \quad \text{F}$$

Según "ii", aplicando las reglas de los operadores conjuntivo y condicional, se tiene:

$$[(\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}) \wedge \mathbf{r}] \rightarrow (\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{p})$$

$$\text{V} \qquad \text{V} \quad \text{V} \quad \text{F} \quad \text{V} \quad \text{F} \quad \text{F}$$

En este paso se puede apreciar que, al aplicarse las reglas de cada operador para preservar el valor "V" del conjuntivo y "F" del condicional, estas se cumplen en una sola opción para cada caso. Ahora, aplicando "iii", reiterando el valor F de "p" y deduciendo el valor de "q" a la vez, se tiene:

$$[(\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}) \wedge \mathbf{r}] \rightarrow (\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{p})$$

$$\text{F} \quad \text{V} \quad \text{F} \quad \text{V} \quad \text{V} \quad \text{F} \quad \text{V} \quad \text{F} \quad \text{F}$$

Como se puede visualizar, para preservar el valor V del "↔", "q" necesariamente tiene que ser F, porque el valor "p" es F. En esta línea de valores el procedimiento ha terminado y, como podemos apreciar, cada una de las variables de la formula tiene la misma función veritativa: "p" tiene un solo valor o cumple con una sola función veritativa, en este caso ser F, de igual modo “q” exhibe solo el valor F y “r” el valor V. Según “v”, en esta línea de valores la hipótesis es cierta, lo que significa que no es una tautología; por lo tanto, la formula no es válida. En otros términos, el método de las tablas abreviadas nos ha permitido descubrir que la fórmula de nuestro ejemplo es F cuando “p” es F, “q” es F y “r” es V.

2. $[\,(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (r \leftrightarrow q)\,] \vee (\sim r \rightarrow \sim p)$

Según “i”, se asigna F al operador principal que es “v” y que sabemos es F en un solo caso, cuando sus dos componentes son F, entonces se tiene:

$$[\,(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (r \leftrightarrow q)\,] \vee (\sim r \rightarrow \sim p)$$

F F F

Según “ii”, aplicando la regla de “→” y, a la vez, de “~”, se obtiene:

$$[\,(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (r \leftrightarrow q)\,] \vee (\sim r \rightarrow \sim p)$$

V F F F V F F F V

Siguiendo el procedimiento, por “iii” reiteramos el valor de “p” y el valor de “r” y, aplicando la regla de cada uno de los operadores correspondientes, esto es, de "→", "↔" y de "~", se tiene:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
[& (& \mathbf{p} & \rightarrow & \sim & \mathbf{q} &) & \rightarrow & (& \mathbf{r} & \leftrightarrow & \mathbf{q} &) &] & \vee & (& \sim & \boldsymbol{r} & \rightarrow & \sim & \boldsymbol{p} &) \\
 & & V & V & V & F & & F & & F & F & V & & & F & & V & F & F & F & V &
\end{array}$$

En esta línea "q" exhibe los valores V y F a la vez, lo que, según la regla "vi", determina que la hipótesis no sea cierta; por lo tanto, si la línea de valores que exhibe la formula no existe, entonces podemos afirmar que la fórmula 2 es tautológica, luego, lógicamente valida.

3. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [\sim p \vee (q \rightarrow r)]$

En esta fórmula el operador principal "↔" es F en dos opciones, entonces, según la regla "i", se tiene:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
[(& \mathbf{p} & \wedge & \mathbf{q} &) & \rightarrow & \mathbf{r} &] & \leftrightarrow & [& \sim & \mathbf{p} & \vee & (& \mathbf{q} & \rightarrow & \mathbf{r} &)] \\
 & & & & & V & & & F & & & & F & & & & & \\
\hline
 & & & & & F & & & F & & & & V & & & & &
\end{array}$$

Cada línea de valores es independiente con respecto a la otra, lo que permite desarrollar la primera línea siguiendo las reglas ya conocidas aplicadas en las formulas (1) y (2); entonces, después de aplicar las reglas de los operadores correspondientes según las reglas "i", "ii" y "iii", y deduciendo el valor de cada una de las variables, se tiene:

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [\sim p \vee (q \rightarrow r)]$$

V F F V F F F V F V F F

F F V

En esta primera línea de valores la variable “q” exhibe V y F a la vez, lo que significa que la hipótesis no es cierta. Así, en esta primera línea no es posible que haya una F para “↔”, pero esto no indica que la formula (3) sea tautológica puesto que aún no se ha verificado si la hipótesis de la segunda línea es cierta o no. De igual manera, aplicamos las reglas de cada uno de los operadores según las reglas “i”, “ii” y “iii” y deduciendo el valor de cada una de las variables se tiene la segunda línea de valores como sigue:

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [\sim p \vee (q \rightarrow r)]$$

V F F V F F F V F V F F

V V V F F F F V V V V V

En la segunda línea de valores observamos que la variable “r” tiene valores V y F a la vez, lo cual nos indica que la hipótesis F en esa línea no es cierta. Ahora podemos afirmar que la formula (3) es una tautología, porque en todas las líneas de valores donde hemos supuesto F, según la función veritativa de “↔”, ese supuesto no existe; por lo tanto, la fórmula es válida. Por otra parte, vale destacar acerca de las contradicciones que aparecen en cada una de las líneas: en la primera se dan en “q” y en la segunda línea en “r”, pero esto es totalmente relativo porque la contradicción en cada línea puede darse en cualquiera de las variables, en vista de que depende de cómo se ha jugado con la reiteración del valor que tiene cada variable, con tal de no infringir las pautas señaladas.

4. **[p → ~ (~ q ∨ ~ r)] ↔ (~ p ∨ r)**

[p	→	~ (	~	q	∨	~	r)]	↔	(~	p	∨	r)
V	V	V	F	V	F	F	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	F	V	F	F	V	V	V

En la primera línea de valores la contradicción que se da en “r” rechaza la hipótesis que el operador “↔” sea F, pero, en la segunda línea, como cada variable cumple una sola función veritativa, la hipótesis F del operador “↔” es cierta. Luego, podemos afirmar que la formula (4) no es una tautología, en vista de que es “F” cuando “p” es V, “q” es V y “r” es F. Por lo tanto, la fórmula es inválida.

Utilizando las reglas mencionadas, el procedimiento es el mismo para determinar la validez o invalidez de cualquier fórmula proposicional, con una sola diferencia: que las líneas de valores pueden aumentar en función de la cantidad de valores falsos que tiene la formula.

El método de las tablas abreviadas nos permite obtener el resultado veritativo funcional de cualquier fórmula proposicional siguiendo el mismo procedimiento empleando en las formulas desarrolladas anteriormente. A continuación más ejemplos:

5. $\mathbf{(p \lor q) \rightarrow (q \land p)}$

$\quad\quad V \quad F \quad F$

En este caso los operadores, tanto "∨" como "∧", tiene más de una opción para preservar sus respectivos valores. Como ambos tienen la misma cantidad de opciones, podemos elegir cualquiera de los dos operadores. Si tomamos el operador "∨" para preservar su valor V, vemos que "∨" es V cuando cualquiera de sus componentes es V, lo que significa que vamos a probar la V de "v" en sus dos opciones. Según "iv", el planteamiento resulta como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc} (\mathbf{p} & \lor & \mathbf{q}) & \rightarrow & (\mathbf{q} & \land & \mathbf{p}) \\ V & V & & F & & F & \\ \hline & V & V & & & & \end{array}$$

Deduciendo el valor de las variables que faltan, al reiterar el valor de "p", "q" tiene que ser necesariamente F para preservar el valor de F del operador "∧"; a la vez reiterando el valor de “q” que esta como miembro de “∨”, el procedimiento habría terminado para esta primera línea de valores, como sigue:

(p	∨	q)	→	(q	∧	p)
V	V	F	F	F	F	V
	V	V				

Si el objetivo es averiguar únicamente si la formula (5) es válida o no, de acuerdo a la primera línea de valores obtenida podemos responder que es invalida, porque cada variable cumple una sola función, por lo tanto la hipótesis es cierta, esto es, de ser F. Pero, si deseamos averiguar los valores de la línea siguiente, seguimos el mismo procedimiento empleado en la primera línea de valores; en este caso, reiterando el valor de “q”, “p” tiene que ser necesariamente F par a preservar el valor F del operador “∧” y, a la vez, reiterando el valor de “p” que aparece como miembro de “∨”, lo que nos permite obtener la segunda línea de valores como sigue:

(p	∨	q)	→	(q	∧	p)
V	V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F

En la segunda línea de valores tampoco hay contradicciones porque cada variable cumple la misma función, lo que significa que la hipótesis es cierta. Esta segunda línea de valores es importante para saber que la formula (5) es falsa en dos opciones, cuando "p" es V y "q" es F, y cuando "p" es F y "q" es V. Con estos datos podemos tener la función veritativa de dicha fórmula porque todos los otros casos serán verdaderos, como se puede ver objetivamente en el siguiente esquema:

p	q	$(p \vee q) \rightarrow (q \wedge p)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La aplicación del método de las tablas abreviadas para decidir la validez o invalidez de fórmulas proposicionales genera en algunos casos más líneas de valores que los asignados según la regla "i". Esto ocurre cuando al aplicarse la regla para preservar el valor de uno o más operadores existe más de una opción. Por ejemplo en la fórmula (5) que acabamos de analizar, las opciones que nos permiten preservar el valor, ya sea de "$\vee$" o de "$\wedge$", nos han permitido descubrir que la fórmula es falsa en dos opciones; en otros casos puedan aparecer otras líneas de valores que puedan admitir o rechazar las hipótesis que se generan. A continuación otro ejemplo:

6. $[p \leftrightarrow (\sim q \wedge r)] \leftrightarrow [(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \rightarrow r)]$

[p	↔	(~	q	∧	r)]	↔	[(~	p	∨	~	q)	∧	(p	→	r)]
V	V	V	F	V	V	F	F	V	V	V	F	F	V	F	F
F	V			F	F	F	V	F	V			F	V	F	F
V	F	V	F	F	F	F	F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	F	V	F	V	V	F	V	F	V	V

En la primera línea de valores la contradicción se da en “r”, entonces esta línea no existe en la tabla de verdad; de igual manera, en la segunda y tercera líneas se da la contradicción en “p” y en “r” respectivamente, entonces tampoco existen estas líneas en la tabla de verdad de la formula (6). Un caso particular ocurre en la segunda línea de valores porque no se ha deducido el valor de “q”, pero esto no afecta el resultado ya que si se encuentra una contradicción se puede afirmar definitivamente que la hipótesis no es cierta, aunque no se haya encontrado el valor de las otras variables. A pesar de que hay contradicción en cada una de las tres primeras líneas, la fórmula no es válida, porque en la cuarta línea hemos encontrado que la formula (6) es F cuando “p” es F, “q” es F y “r” es V, y en todos los otros casos los valores son verdaderos. En otros términos, la hipótesis en esta línea es cierta; por lo tanto, el resultado veritativo de esta fórmula es: VVVVVVFV.

b. Probar si es Contradicción

Por otra parte, para averiguar si una formula proposicional A es o no Contradicción por el método de las tablas abreviadas, en la práctica, el procedimiento es el mismo, con la única diferencia de que se parte de una hipótesis verdadera (V) para A. Es decir, si a partir de una hipótesis V de A se deduce que cada una de las variables de A tiene el mismo valor veritativo funcional, entonces la hipótesis es cierta, y por tanto A no es contradictoria. Pero, si a partir de la hipótesis V de A se deduce que existe una contradicción en cada línea de valores, entonces la hipótesis no es cierta en cada línea de valores, por lo tanto A es una fórmula de contradictoria. Desde este punto de vista, y con excepción de la regla “i”, se siguen todas las reglas señaladas para averiguar la contradicción o no de la formula proposicional A. En este caso “i” debe decir: asignar el valor V a la formula A según la función veritativa del operador principal. Las otras se siguen exactamente igual.

Por ejemplo, dada la siguiente formula y a la vez asignándole el valor V al operador principal "∧", su función veritativa es como sigue:

7. $[\,\mathbf{p} \vee (\sim \boldsymbol{q} \wedge \sim \mathbf{r})\,] \wedge \sim [\sim \boldsymbol{p} \rightarrow (\boldsymbol{r} \wedge \sim \boldsymbol{q})]$

V V V

Aplicando las reglas de cada uno de los operadores y siguiendo las pautas señaladas hasta deducir el valor de cada una de las variables, se tiene:

$[\,\mathbf{p} \vee (\sim \boldsymbol{q} \wedge \sim \mathbf{r})\,] \wedge \sim [\sim \boldsymbol{p} \rightarrow (\boldsymbol{r} \wedge \sim \boldsymbol{q})]$

F V V F V V F V V V F F F F V F

La hipótesis V de la formula ha generado solo una línea de valores donde cada una de las variables cumple una sola función, esto es, "p" es F, "q" es F y "r" es F, lo que nos indica que la hipótesis es cierta, y la formula en esta línea de valores es verdadera, resultando falsos en todos los otros casos; por lo tanto, (7) no es contradictoria y su resultado veritativo es: FFFFFFFV.

A continuación otros ejemplos sobre la decisión de fórmulas si son o no contradictorias:

8. $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \leftrightarrow [\sim r \wedge (q \vee \sim p)]$

V F F V F V V F V F V V F

V V V F F V V F F F F F V

Como en cada línea de valores existe contradicción, en la primera en "p" y en la segunda en "q", la hipótesis no es cierta, es decir, no existe una sola posibilidad de que la formula (8) sea verdadera, por lo tanto es contradictoria. En otros términos, esta fórmula es falsa en toda interpretación: FFFFFFFF.

9. $[(p \rightarrow \sim q) \wedge \sim r] \leftrightarrow [(\sim p \rightarrow r) \wedge (q \vee r)]$

V V V F V V F V F V V F V V V F

V F F V F V F V V F F F F

F F V V V V F F F F

La hipótesis ha generado tres líneas de valores, cada una de ellas exhibe una contradicción, en la primera y en la segunda la contradicción se da en "q", y en la tercera línea en "r". Luego, la fórmula (9) es contradictoria según la regla "vi", por lo tanto lógicamente invalida.

c. Probar si es de Contingencia

El procedimiento es el mismo, resulta ligeramente más complejo en vista de que la hipótesis A puede ser verdadera (V) o puede ser falsa (F). Como ya sabemos que la hipótesis

V de A nos permite averiguar si A es o no Contradictorio, así también, la hipótesis F de A nos permite averiguar si A es o no Tautología, entonces una formula A es de contingencia cuando a partir de una hipótesis V o F de A se genera una o más líneas de valores , donde en cada una de ellas la hipótesis es cierta, pero donde la cantidad de líneas de valores sin contradicción es menor que opciones 2^n de A. Por ejemplo, si A es una tautología con opciones de 2^3 y queremos averiguar en qué opciones A es V, la hipótesis V de A genera ocho líneas de valores donde en cada línea la hipótesis es cierta. Igual ocurrirá con una formula A contradictoria con 2^3 opciones: si deseamos averiguar en qué casos A es F, la hipótesis generara también ocho interpretaciones o líneas de valores, cada una de ellas sin contradicciones. Por ejemplo, a continuación vamos a averiguar en cuántos casos u opciones es F la siguiente formula a partir de la hipótesis F.

10. $[\mathbf{p} \vee (\mathbf{q} \wedge \mathbf{r})] \rightarrow (\sim \boldsymbol{p} \leftrightarrow \sim \boldsymbol{r})$

[p	∨	(q	∧	r)]	→	(~	p	↔	~	r)
V	V	V	F	F	F	F	V	F	V	F
V	V	F	F	F	F	F	V	F	V	F
F	V	V	V	V	F	V	F	F	F	V

Esta formula es contingente, porque la hipótesis F ha generado tres líneas de valores, cada una de ellas sin contradicción, confirmando que la hipótesis es cierta en tres opciones: cuando "p" es V, "q" es V y "r" es F, cuando "p" es V, "q" es F y "r" es F, y cuando "p" es F, "q" es V y "r" es V. En todas las otras opciones la fórmula es V. Estas opciones donde la fórmula (10) es F y las opciones donde es V se pueden observar en la siguiente combinación de valores:

	p	q	r	$[p \vee (q \wedge r)]$	$\rightarrow$	$(\sim p \leftrightarrow \sim r)$
1	V	V	V		**V**	
2	V	V	F		**F**	
3	V	F	V		**V**	
4	V	F	F		**F**	
5	F	V	V		**F**	
6	F	V	F		**V**	
7	F	F	V		**V**	
8	F	F	F		**V**	

Las líneas 2, 4 y 5 muestran las opciones descubiertas por el método abreviado; sin embargo, no solo la hipótesis F nos permite descubrir los valores falsos, como se puede apreciar, sino también a partir de los valores falsos podemos descubrir los valores verdaderos.

El uso del método de las tablas abreviadas se puede aplicar a cualquier fórmula de la lógica proposicional del mismo modo como ha sido empleado en los ejemplos expuestos.

2.9.6. Ejercicios Propuestos

1. Por el método de las tablas abreviadas determinar si cada una de las siguientes formulas son tautológicas o no.

2.1 $(p \wedge q) \rightarrow p$

2.2 $(p \leftrightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

2.3 $\sim[(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \sim r)]$

2.4 $[(\sim p \rightarrow q) \wedge (r \vee \sim q)] \rightarrow (\sim r \rightarrow p)$

2.5 $(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow q)$

2.6 $[(p \leftrightarrow q) \wedge (r \leftrightarrow q)] \rightarrow (p \leftrightarrow r)$

2.7 $[(\sim p \wedge q) \wedge (r \leftrightarrow p) \wedge (\sim r \leftrightarrow s)] \rightarrow (q \leftrightarrow s)$

2.8 $\sim (p \rightarrow \sim q) \vee (\sim r \leftrightarrow s) \vee \sim (r \wedge t) \vee (q \rightarrow s)$

2.9 $[(p \vee \sim q) \leftrightarrow (r \wedge \sim s)] \leftrightarrow [(q \wedge \sim p) \leftrightarrow (r \rightarrow s)]$

2.10 $[(\sim p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \sim r] \leftrightarrow [\sim q \rightarrow (r \leftrightarrow p)]$

2. Utilizando el método de las tablas abreviadas determine si cada una de las siguientes formulas es contradictoria o no.

3.1 $(\sim p \rightarrow q) \wedge \sim (q \vee p)$

3.2 $[(p \wedge \sim q) \rightarrow p] \rightarrow (q \wedge \sim q)$

3.3 $(p \leftrightarrow \sim q) \wedge (r \rightarrow \sim p) \wedge (\sim q \leftrightarrow \sim p)$

3.4 $[(p \wedge q) \rightarrow \sim r] \leftrightarrow [r \wedge \sim (q \rightarrow \sim p)]$

3.5 $[(p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge s)] \leftrightarrow [(\sim p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \sim s)]$

3. Por el método de las tablas abreviadas averigüe los valores de verdad de cada una de las siguientes formulas y luego diga si es contingente, tautológica o contradicción.

4.1 $(p \vee q) \rightarrow \sim p$

4.2 $(\sim p \wedge q) \vee (\sim r \rightarrow \sim q)$

4.3 $(p \leftrightarrow \sim q) \wedge (\sim r \wedge \sim p) \wedge (r \leftrightarrow q)$

4.4 $[(\sim p \rightarrow q) \rightarrow \sim r] \rightarrow [q \rightarrow (r \wedge p)]$

4.5 $[(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \leftrightarrow r)] \leftrightarrow [(q \leftrightarrow r) \vee (p \rightarrow q)]$

2.10. LA INFERENCIA

El objetivo de la lógica es estudiar el análisis formal de validez de las inferencias. Es decir, el análisis formal permite simbolizar las inferencias en esquemas moleculares y demostrar con seguridad (mediante diversos métodos veritativos) su validez o invalidez. Una inferencia, llamada también argumento o razonamiento, es una estructura de proposiciones en la que a partir de una o más proposiciones llamadas premisas (antecedentes), se obtiene otra, llamada conclusión (consecuente). De tal modo que la inferencia tendrá forma condicional.

Cada inferencia es una estructura de proposiciones donde a partir de una o más proposiciones llamadas premisas se deduce otra proposición llamada conclusión. Formalmente podemos definirla de la siguiente manera:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \therefore C$$

Donde "P" y su respectivo subíndice representan a cada premisa, "∴" significa luego, por lo tanto, etc., y "C" representa la conclusión.

Por ello, la relación más importante entre el conjunto de premisas y la conclusión de una inferencia es el concepto de implicación, porque si la conclusión sigue necesariamente al conjunto de premisas entonces el conjunto de premisas implica a la conclusión.

2.10.1. La Implicación:

En primer lugar, es importante distinguir los conceptos condicional e implicación, porque la no distinción de estos conceptos ha generado, entre otros problemas, la "paradoja de la implicación material", donde se considera el operador "→" como "implica" en vez de leerlo como símbolo de "si…entonces". Se dice que "A" implica a "B" cuando unidos por el condicional, "A" como antecedente y "B" como consecuente, la relación es válida o lógicamente verdadera (tautológica). Por ejemplo, dadas las formulas "A" y "B":

1. $A = p \wedge q$
$B = p \vee q$

Para saber si "A implica a B", debemos proceder relacionado las fórmulas de acuerdo a la siguiente forma condicional:

$$A \rightarrow B$$

Luego, sustituyendo "A y B" por sus respectivas formulas, y aplicando las tablas de verdad, se tiene:

p	q	(p ∧ q)	→	(p ∨ q)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	F

Como el resultado es tautológico o lógicamente verdadera, entonces “(p ∧ q) implica a (p ∨ q)”. Este ejemplo nos muestra que no es lo mismo el concepto condicional “si A entonces B” que el concepto implicación “A implica a B”. En el primer caso, se refiere a una relación formal condicional, antecedente y consecuente, mientras que en la implicación se refiere a una relación semántica o a una relación entre valores de verdad.

Nota: *Si una proposición “A” implica a otra proposición “B”, entonces es imposible que “A” sea verdadera y “B” falsa, es decir, si “A” es verdadera entonces “B” es necesariamente verdadera.*

Esta definición de la implicación podemos expresarla como sigue:

$$A \rightarrow B = \text{def.} \sim (A \wedge \sim B)$$

En el ejemplo (1), si “($p \wedge q$)” es verdadera entonces “($p \vee q$)” es necesariamente verdadera. Esta interpretación aparece, como se puede apreciar, en la primera opción de la tabla de verdad. Luego, “($p \vee q$)” se deduce válidamente a partir de “($p \wedge q$)”. Esto significa que la implicación es un tipo de inferencia donde la conclusión se obtiene a partir de una sola premisa. A continuación otro ejemplo:

2. Dadas las siguientes proposiciones:

A = Una señorita se casa joven, o puede llegar a los 21 años y contraer matrimonio con un noble señor.

B = Una señorita se casa joven o contrae matrimonio con un noble señor.

Vamos a determinar si la proposición “A” implica a la proposición “B”. Para el efecto, primero simbolizamos las proposiciones, luego aplicamos el método decisorio ya conocido, averiguamos la relación de implicación entre “A” y “B”, como sigue:

Una señorita se casa joven = p

Una señorita puede llegar a los 21 años = q

Una señorita contrae matrimonio con un noble señor = r

$A = p \vee (p \wedge r)$

$B = p \vee r$

$$\begin{array}{ccccccccccc} [\,p & \vee & (\,p & \wedge & r\,)] & \rightarrow & (\,p & \vee & r\,) \\ F & V & V & V & V & F & F & F & F \end{array}$$

Aplicando el método abreviado hemos determinado que en ninguna interpretación el operador principal "→" es falso. Por lo tanto, la proposición "A" implica a la proposición "B". En otros términos, de la proposición: "Una señorita se casa joven, o puede llegar a los 21 años y contraer matrimonio con un noble señor" se deduce válidamente la proposición "una señorita se casa joven o contrae matrimonio con un noble señor". En lo sucesivo, y por razones prácticas, usaremos solo el método abreviado para decidir la validez de fórmulas por las tablas de verdad.

3. En esta proposición vamos a establecer si "B" está implicada por "A":

A= Newton dijo la verdad si la física clásica no es absoluta; si y sólo si, los fenómenos naturales no se comportaban según las leyes mecánicas de Newton.

B = Newton no dijo la verdad sólo si los fenómenos naturales no se comportaban según las leyes mecánicas de Newton.

Simbolizando y sometiendo a prueba la relación de implicación se tiene:

Newton dijo la verdad = p

La física clásica es absoluta = q

Los fenómenos naturales se comportaban según las leyes mecánicas de Newton = r

A= (~ q → p) ↔ ~ r

B = ~ p → ~ r

[(~ q → p) ↔ ~ r] → (~ p → ~ r)

V F F F V F V F V F F F V

En este caso existe una interpretación falsa en el operador "→", de modo que "B" no está implicada por "A".

Nota: *"A" implica a "B"* **=** *"B" está implicada por "A"*

"B" implica a "A" **=** *"A" está implicada por "B"*

2.10.2. La Equivalencia

También es importante distinguir el concepto equivalencia del concepto bicondicional. El concepto bicondicional se refiere a la forma lógica de "A" si y solo si "B", mientras que el concepto equivalencia se refiere a una relación semántica entre los valores componentes de "A" si y solo si "B".

Se dice que "A" equivale a "B" cuando unidas "A" y "B" por la bicondicional y aplicada la regla correspondiente, se obtiene como resultado una relación lógicamente verdadera o una tautología. Por ejemplo, sean las formulas "A" y "B":

i. **A = $[(p \wedge (p \vee q)]$**

B = p

Para determinar si "A equivale a B", vamos a relacionar amabas fórmulas de acuerdo al siguiente forma bicondicional.

$$A \leftrightarrow B$$

Luego, sustituyendo "A" y "B" por respectivas formulas, y aplicando las tablas de verdad, se tiene:

p	q	[p ∧	(p ∨	q)] ↔	p)
V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	F

En este caso podemos observar que "$[(p \wedge (p \vee q)]$" equivale a "p", puesto que se trata de una relación lógicamente verdadera. Entonces la formula bicondicional es equivalente, lo que significa que "A si y solo si B" es distinto de "A equivale a B", porque en le primer caso es la expresión de una forma condicional, mientras que en la equivalencia se refiere a una relación semántica donde los componentes tienen los mismos valores de verdad

Nota: *Si una proposición "A" equivale a otra proposición "B", entonces "A" implica a "B" y, a la vez, "B" implica a "A".*

Esta definición de la equivalencia puede ser expresada como sigue:

$$A \leftrightarrow B =\text{def. } (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

Según esta definición, de la formula "[(p ∧ (p ∨ q)]" se deduce válidamente "p", y, a la vez, podemos deducir válidamente "[(p ∧ (p ∨ q)]" a partir de "p". Esto significa que la equivalencia es otro tipo de inferencia donde la conclusión se obtiene a partir de una premisa.

ii. Determinar si "A" y "B" son equivalentes:

A = Si la exportación agrícola crece y hay dinero en el país, entonces hay inversión de capitales.

B = Si hay dinero en el país, entonces hay inversión de capitales a menos que la exportación agrícola no crezca.

Simbolizando y sometiendo a prueba, se tiene:

Si la exportación agrícola crece = p

Hay dinero en el país = q

Hay inversión de capitales = r

$A = (p \wedge q) \rightarrow r$

$B = q \rightarrow (r \vee \sim p)$ o $q \rightarrow (\sim\sim p \rightarrow r)$

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
\mathbf{[(p} & \wedge & \mathbf{q)} & \rightarrow & \mathbf{r]} & \leftrightarrow & \mathbf{[q} & \rightarrow & \mathbf{(r} & \vee & \sim & \mathbf{p)]} \\
V & F & F & V & F & F & V & F & F & F & F & V \\
\hline
V & V & V & F & F & F & V & V & F & V & V & F
\end{array}
$$

El método abreviado muestra que las proposiciones "A" y "B" son equivalentes, dado que no existe una interpretación falsa en el operador "↔"

2.10.3. Análisis de Validez de Inferencia

Una inferencia es válida si la conclusión se deriva lógicamente de las premisas. Para analizar la validez o invalidez de una inferencia, primero tenemos que distinguir la conclusión del conjunto de premisas. En el lenguaje ordinario la conclusión no siempre aparece al final del argumento. Así, la conclusión puede aparecer en el comienzo, en el intermedio o al final de la inferencia. En este caso, puede ocurrir que el sentido contextual de la inferencia nos proporcione una pista para distinguir la conclusión del conjunto de premisas. Esta distinción se puede efectuar con mayor eficacia si conocemos la función que desempeñan ciertos términos de enlace con mayor fuerza para conectar el conjunto de premisas y la conclusión. Estos términos de enlace sirven de referencia para indicar si la premisa se encuentra "antes" o "después" de la conclusión.

En la práctica, se ubica primero la conclusión, porque ubicada esta, todas las proposiciones restantes serán premisas. Las diversas posiciones que ocupan las premisas y la conclusión en una inferencia se pueden expresar esquemáticamente como sigue:

1º P_1, P_2, P_n. Luego, **C.**
2º **C**, puesto que P_1, P_2 y P_n.
3º P_1, P_2, luego, **C**, puesto que P_n.

1º = Términos referenciales: Luego, por lo tanto, por consiguiente, en consecuencia, de modo que, de ahí que, etc. (la conclusión aparece después del termino referencial en otras palabras la conclusión se encuentra al final).
2º = Términos referenciales: Puesto que, ya que, en vista de, dado que, etc. (la conclusión se encuentra antes del término referencial en otras palabras al inicio).

3º = Términos referenciales: Es la unión de los términos referenciales de 1º y 2º (se muestra la conclusión al intermedio del argumento).

Cualquiera que sea la inferencia a simbolizar, la secuencia de premisas y conclusión debe aparecer de acuerdo al siguiente esquema:

$$\begin{array}{r} \mathbf{P_1} \\ \mathbf{P_2} \\ \mathbf{P_3} \\ \vdots \\ \mathbf{P_n} \\ \hline \therefore \mathbf{C} \end{array}$$

Simbolizada la secuencia de premisas y la conclusión, se debe obtener la formula inferencial de acuerdo al siguiente esquema:

$$\mathbf{P_1 \wedge P_2 \wedge \ \ldots \wedge \ P_n \rightarrow C}$$

Vale insistir en que el uso expuesto de los términos referenciales no es una regla, sino, como se indica, solo referencial. Por ejemplo, el caso 3º, representado simbólicamente como sigue, también una interpretación correcta de la inferencia en cuestión, donde el "puesto que" se está representando como una forma condicional:

$$\mathbf{(P_1 \wedge P_2) \rightarrow (P_n \rightarrow C)}$$

Luego, para decidir la validez o invalidez, se debe evaluar la fórmula de la inferencia por la tabla de valores o por el método de las tablas abreviadas. La inferencia será válida si la conjunción de premisas implica a la conclusión. En otras palabras si al evaluar una inferencia, si su matriz principal es tautología, la inferencia es válida. En caso de resultar contradictoria o contingente, la inferencia es inválida.

2.10.4. Evaluación de una inferencia

Pasos:

a. Reconocer premisas y conclusión.

Ejemplo:

Si estudio la física de A. Einstein, aprendo una parte de la física elemental. Estudio la física de A. Einstein. Luego aprendo una parte importante de la física elemental.

P_1: Si estudio la física de A. Einstein, aprendo una parte de la física elemental.

P_2: Estudio la física de A. Einstein.

C: Aprendo una parte importante de la física elemental.

b. Reconocer las variables que forman parte de la inferencia. - Estudio la física de A. Einstein = p

- Aprendo una parte importante de la física elemental = q

c. Formalizar premisas y conclusión.

P1: $p \rightarrow q$

P2: p

C: q

d. Unir las premisas a través de las conjuntivas y el conjunto de las premisas con la conclusión a través de una condicional.

$$[(P_1) \wedge (P_2) \wedge \ \dots \wedge \ (P_n)] \ \rightarrow \ C$$

e. Evaluar el esquema por tablas de verdad.

En el ejemplo:

$$[(p \rightarrow q) \wedge p\ ] \rightarrow q$$

p	q	[(p → q)	∧	p]	→	q)
V	V	V	V	V	V	**V**
V	F	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	V	F

La matriz principal es una tautología, por ello la inferencia es válida.

En los demás ejemplos por razones de comodidad, para decidir la validez o invalidez de las inferencias, usaremos especialmente el método de las tablas abreviadas. En este caso, para facilitar el procedimiento, partiremos de la hipótesis verdadera de cada premisa y falsa de la conclusión, que es esquemáticamente podemos expresar así:

$$\underset{V}{[\mathbf{P_1}} \wedge \underset{V}{\mathbf{P_2}} \wedge \ldots \wedge \underset{V}{\mathbf{P_n}}] \rightarrow \underset{F}{\mathbf{C}}$$

Luego, la aplicación de las reglas del método abreviado son exactamente las mismas.

2.10.5. Ejercicios Desarrollados

1. Si la tormenta continua o anochece, nos quedaremos a cenar o a dormir, si nos quedamos a cenar o a dormir no iremos mañana al concierto; pero sí iremos mañana al concierto. Así pues, la tormenta no continua.

Formalización:

La tormenta continua = p

Anochece = q

Nos quedaremos a cenar = r

Nos quedaremos a dormir = s

Iremos mañana al concierto = t

$$\begin{array}{l} (p \vee q) \rightarrow (r \vee s) \\ (r \vee s) \rightarrow \sim t \\ t \\ \hline \therefore \sim p \end{array}$$

Como podemos apreciar, esta inferencia es del caso 1º, porque la conclusión aparece al final del argumento. Ahora unimos las premisas por el operador "∧" y estas con la conclusión por "→", y se obtiene la siguiente formula de la inferencia. $\{[(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)] \wedge [(r \vee s) \rightarrow \sim t] \wedge t\} \rightarrow \sim p$

Luego, decidimos la validez o invalidez por el método abreviado, como sigue:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} \{[(\mathbf{p} & \vee & \mathbf{q}) & \rightarrow & (\mathbf{r} & \vee & \mathbf{s})] & \wedge & [(\mathbf{r} & \vee & \mathbf{s}) & \rightarrow & \sim & \mathbf{t}] & \wedge & \mathbf{t}\} & \rightarrow & \sim & \mathbf{p} \\ F & F & F & V & F & F & F & V & F & F & F & V & F & V & V & V & F & F & V \end{array}$$

Como se puede observar, hemos asignado directamente el valor V a cada una de las premisas y F a la conclusión, luego hemos deducido los valores correspondientes aplicando las reglas ya conocidas. Vemos que esta **inferencia es válida**, porque la contradicción en "p" nos indica que no existe una interpretación falsa en la fórmula de la inferencia, por lo tanto el conjunto de premisas implica a la conclusión.

El procedimiento para analizar la validez de inferencia en lenguaje natural es el mismo, por lo que obviaremos en lo sucesivo algunas explicaciones adicionales innecesarias. A continuación más ejemplos:

2. Si un triángulo tiene tres ángulos, un cuadrado tiene cuatro ángulos rectos. Un triángulo tiene tres ángulos y su suma vale dos ángulos rectos. Si los rombos tienen cuatro ángulos rectos, los cuadrados no tienen cuatro ángulos rectos. Por lo tanto los rombos no tienen cuatro ángulos rectos.

Formalización:

Un triángulo tiene tres ángulos = p

Un cuadrado tiene cuatro ángulos rectos = q

Su suma vale dos ángulos rectos = r

Los rombos tienen cuatro ángulos rectos = s

$p \rightarrow q$

$p \wedge r$

$\underline{s \rightarrow \sim q}$

$\therefore \sim s$

$$[(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge r) \wedge (s \rightarrow \sim q)] \rightarrow \sim s$$

V V V V V V V V V V V F F F V

En vista de que "q" muestra la contradicción, la **inferencia es válida.**

3. Si la gorila es atractiva, el gorila sonreirá abiertamente o será infeliz. Si no es feliz, no procreará en cautividad. Por consiguiente, si la gorila es atractiva, entonces, si el gorila no sonríe abiertamente, no procreará en cautividad.

Formalización:

La gorila es atractiva = p

El gorila sonreirá abiertamente = q

Es feliz = r

Procreará en cautividad = s

$p \rightarrow (q \vee \sim r)$

$\sim r \rightarrow \sim s$

$\therefore p \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim s)$

$$\{[p \rightarrow (q \vee \sim r)] \wedge (\sim r \rightarrow \sim s)\} \rightarrow [p \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim s)]$$

V V F V V F V F V V F V F V F V F F F V

En vista de que "r" muestra la contradicción, la **inferencia es válida**.

4. Si el ejército marcha contra el enemigo, tiene posibilidades de éxito; y arrasará la capital enemiga, si tiene posibilidades de éxito. El ejército marcha contra el enemigo, o se repliega rápidamente. Si se repliega rápidamente, el enemigo atacara su retaguardia; y perderá la guerra, si el enemigo ataca su retaguardia. Por lo tanto, si no arrasa la capital enemiga, perderá la guerra.

Formalización:

El ejército marcha contra el enemigo = p

Tiene posibilidades de éxito = q

Arrasará la capital enemiga = r

Se repliega rápidamente = s

El enemigo atacara su retaguardia = t

Perderá la guerra = u

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$

$p \vee s$

$(s \rightarrow t) \wedge (t \rightarrow u)$

$\therefore \sim r \rightarrow u$

$$\{[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \wedge (p \vee s) \wedge [(s \rightarrow t) \wedge (t \rightarrow u)]\} \rightarrow (\sim r \rightarrow u)$$

F V F V F V F V F V V V V V V V V V V F V F F F

En vista de que "u" muestra la contradicción, la **inferencia es válida**.

5. Si el cometa Halley pasa cerca de la tierra, podremos observarlo con un telescopio; pero no pasara cerca de la tierra, si las condiciones no son propicias. Si se envía una sonda especial a su encuentro, las condiciones serán propicias. Si pasa cerca de la tierra y las condiciones son propicias, podremos apreciar la belleza del Halley. Las condiciones no son propicias o podremos observar el Halley con un telescopio. Así pues, si el cometa Halley pasa cerca de la tierra o se envía una sonda espacial a su encuentro, podremos apreciar la belleza del cometa Halley.

Formalización:

El cometa Halley pasa cerca de la tierra = p

Podremos observarlo con un telescopio = q

Las condiciones son propicias = r

Se envía una sonda especial a su encuentro = s

Apreciamos la belleza del cometa Halley = t

$(p \rightarrow q)$

$(\sim r \rightarrow \sim p)$

$(s \rightarrow r)$

$(p \wedge r) \rightarrow t$

$\underline{(\sim r \vee q)}$

$\therefore (p \vee s) \rightarrow t$

{(p → q) ∧ (~ r → ~p) ∧ (s → r) ∧ [(p ∧ r) → t] ∧ (~ r ∨ q)} → [(p ∨ s) → t]

F V F V V F V V F V F V F V F F F V F V V F V F F F V V F F

F V V V F V V V F V V V V V F F V V F V F V V V F F V V F F

En vista de que no existe una contradicción en alguna variable, indica que la fórmula es falsa, luego **la inferencia es inválida.**

6. Si Marcela opina que hay que hacer lo posible para ser feliz, abandonara a su amante o se dedicara a su profesión. Si se dedica a su profesión, no dejará a su marido. En conclusión, si Elvira opina que hay que hacer lo posible para ser feliz, entonces, dejará a su marido aunque no abandone a su amante.

Formalización:

Marcela opina que hay que hacer lo posible para ser feliz = p

Abandonara a su amante = q

Se dedicara a su profesión = r

Dejará a su marido = s

$p \rightarrow (q \vee r)$

$r \rightarrow \sim s$

$\therefore\ p \rightarrow (\sim q \rightarrow s)$

$$\begin{array}{l}\{[p \rightarrow (q \vee r)] \wedge (r \rightarrow \sim s)\} \rightarrow [p \rightarrow (\sim q \rightarrow s)] \\ \text{V V F V V V V V V F F V F V F F F}\end{array}$$

En vista de que no existe una contradicción en alguna variable, indica que la fórmula es falsa, luego la inferencia es inválida.

7. Cuando Mitchell no juega al baloncesto, juega al tenis; cuando juega al tenis, juega al futbol; no juega al futbol. Por lo tanto; Mitchell juega al baloncesto.

Formalización:

Mitchell juega al baloncesto = p

Juega al tenis = q

Juega al futbol = r

$\sim p \rightarrow q$

$q \rightarrow r$

$\sim r$

$\therefore\ p$

$$\begin{array}{l}\mathbf{[(\sim p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \sim r] \rightarrow p} \\ \text{V F V V V V V V V V F F F}\end{array}$$

En vista de que "r" muestra la contradicción, la **inferencia es válida**.

8. Bien, si Amparo escala el monte acabará muy cansada, o bien si sube al cerro acabara muy cansada. Así, si Amparo escala el monte y el cerro, acabara muy cansada.

Formalización:

Amparo escala el monte = p

Acabará muy cansada = q

Amparo escala el cerro = r

$$\frac{(p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow q)}{\therefore\ (p \wedge r) \rightarrow q}$$

[(p → q) ∨ (r → q)] → [(p ∧ r) → q]

V F F V V V V F V V V F F

En vista de que "q" muestra la contradicción, la **inferencia es válida**.

9. A los logicos le gusta la langosta, pero no les gustan los moluscos o beben vino blanco. Si beben vino blanco, entonces comen camaron o les gusta comer cangrejo con almejas. Por lo tanto, si a los logicos les gustan los moluscos, entonces aunque no coman camaron les gusta comer cangrejo con almejas.

Formalizaciòn:

A los logicos le gusta la langosta = p

Les gustan los moluscos = q

Beben vino blanco = r

Comen camaron = s

Les gusta comer cangrejo con almejas = t

$p \wedge (\sim q \vee r)$

$r \rightarrow (s \vee t)$

$\therefore\ q \rightarrow (\sim s \rightarrow t)$

10. Si todas las tierras son cultivadas entonces la reforma agraria dará buenos resultados. La reforma agraria dará buenos resultados si y sólo si el gobierno construye reservorios. Aumentará el volumen de la producción agrícola si y sólo si el gobierno construye reservorios. Pero, no es el caso que si la inflación persiste aumente el volumen de la producción agrícola. En consecuencia, si la inflación persiste, todas las tierras no serán cultivados.

Formalización:

Todas las tierras son cultivadas = p

La reforma agraria dará buenos resultados = q

El gobierno construye reservorios = r

Aumentará el volumen de la producción agrícola = s

La inflación persiste = t

$$\begin{array}{l} (p \rightarrow q) \\ (q \leftrightarrow r) \\ (s \leftrightarrow r) \\ \sim (t \rightarrow s) \\ \hline \therefore t \rightarrow \sim p \end{array}$$

$$\mathbf{[(p \rightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (s \leftrightarrow r) \wedge \sim (t \rightarrow s)] \rightarrow (t \rightarrow \sim p)}$$

F V F V F V F V F V F V V V F F F V F F V

En vista de que "p" muestra la contradicción, la **inferencia es válida**.

2.10.6. Ejercicios Propuestos:

Analizar si en cada una de las siguientes proposiciones las inferencias son válidas.

a) La película es original, si ha habido un asesinato y no se sabe quién es el autor del delito. Si se sabe quién es el autor del delito entonces el homicida es el mayordomo. Pero el guionista no es original si el homicida es el mayordomo. En consecuencia, si ha habido un asesinato, entonces la película es original si el guionista es original.

b) Se conservará el mismo volumen de producción si la reforma agraria no da buenos resultados; dado que la reforma agraria dará buenos resultados si todas las tierras son explotadas, y se conservará el mismo volumen de producción si todas las tierras no son explotadas.

c) Tanto la matemática como la geometría son exactas porque Euclides no se equivocó. Si Euclides no se equivocó, tanto la matemática como la geometría son sistemas axiomáticos. Pero cuando se mide distancias interestelares, la geometría no es exacta. En consecuencia, cuando se mide distancias interestelares, tanto la matemática como la geometría no son exactas, en vista de que la matemática y la geometría son exactas si y sólo si son sistemas axiomáticos.

d) Si los físicos dicen la verdad, el movimiento que describen los astros es elíptico y la formula de la gravedad es exacta. Pero, si los físicos no dicen la verdad, ni la fórmula de la gravedad ni la fórmula de la velocidad de la luz son exactas. Luego, las formulas de la gravedad y de la velocidad de la luz son exactas, si y solo si el movimiento que describen los astros es elíptico.

e) Se conservara el mismo volumen de producción si la reforma agraria no da buenos resultados; dado que la reforma agraria dará buenos resultados si todas las tierras son explotadas, y se conservará el mismo volumen de producción si todas las tierras no son explotadas.

f) Si un cuerpo de conocimientos no es comunicable, entonces no es científico. No es el caso de que si un cuerpo de conocimientos es comunicable, entonces el método científico y las técnicas puedan aprenderse en los libros. Por consiguiente, un cuerpo de conocimiento es comunicable o no es científico, dado que el método científico puede aprenderse en los libros.

g) La lámpara está encendida, si y sólo si hay fluido eléctrico a la vez que hay alguien en casa. Si no hay alguien en casa, o los de la casa han salido a pasear o han ido a una función teatral. Los de casa han ido a una función teatral si han salido a pasear. Por consiguiente, si hay fluido eléctrico entonces no es el caso que hayan ido a una función teatral y la lámpara esté encendida.

h) Aunque no gane el concurso viajaré al extranjero. Obtendré una beca, a menos que estudie física nuclear o informática. Si estudio física nuclear o informática, entonces no me dedicare al turismo. Por lo tanto, si gano el concurso pero no obtengo una beca, entonces no viajare al extranjero si y sólo si me dedicare al turismo.

i) Si el galeón trae piratas entonces el capitán no ha muerto. La tripulación llegara al amanecer si no hay tormenta en alta mar. Pero, si hay tormenta en alta mar entonces el galeón no trae piratas. De modo que, la tripulación llegara al amanecer si el capitán no ha muerto.

j) Si la física es exacta, Tolomeo no dice la verdad si Copérnico tiene la razón. No es el caso que si la tierra es plana el movimiento de los planetas no sea elíptico. Tolomeo dice la verdad si y sólo si la tierra es plana. De ahí que, Copérnico tiene la razón si y solo si el movimiento de los planetas es elíptico, dado que la física es exacta.

k) O Carneades no habría venido en auxilio de los epicúreos o no habría hecho causa común contra los estoicos; en vista de que, si hubiera venido en auxilio de los epicúreos habría venido contra los gnósticos y con el pretexto de lucir su virtuosidad dialéctica, y si hubiera venido con el pretexto de lucir su virtuosidad dialéctica, no habría hecho causa común contra los estoicos ni habría venido contra los gnósticos.

2.11. LEYES LÓGICAS

Antes de enunciar estas leyes es importante distinguir primero los conceptos de principio lógico, ley lógica y regla lógica.

Un principio lógico es el fundamento de toda verdad lógica (tautología). De un principio lógico podemos generar tautologías indefinidamente, y, a la vez, cualquier tautología del universo lógico puede reducirse a un principio lógico. Son conocidos los tres principios clásicos: de Identidad, de no Contradicción y del Tercio Excluido.

Según el Principio de Identidad, una proposición solo es idéntica a sí misma. Simbólicamente se expresa por:

$$p \rightarrow p$$

Principio de no Contradicción dice: es imposible que una proposición sea verdadera y falsa a la vez. Simbólicamente, como sigue:

$$\sim (p \wedge \sim p)$$

Según el principio del Tercio Excluido, una proposición o es verdadera o es falsa, no existe una tercera posibilidad. Simbólicamente, como sigue:

$$p \vee \sim p$$

Una fórmula es una ley lógica si y solo si cualquiera sea la interpretación formalmente correcta que se haga de la misma se obtiene como resultado una verdad lógica. Una ley lógica pertenece al lenguaje objeto del sistema y siempre permanece en el plano teórico. Cualquier tautología del universo lógico es una ley lógica. De la infinita cantidad de tautología, algunas son útiles para la solución de muchos problemas lógicos. Estas leyes podemos clasificarlas en leyes equivalentes y leyes implícativas.

Una regla lógica es una forma valida de razonamiento cuyo objeto es la operatividad, esto es, nos permite efectuar operaciones para transformar una formula o derivar una consecuencia lógica. Una regla lógica pertenece al metalenguaje y se sitúa en el plano práctico.

Un ejemplo nos permitirá distinguir estos dos conceptos. El Modus Ponendo Ponens (MPP) como ley lógica se expresa mediante una formula proposicional, así:

$$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$$

pero como regla el MPP se expresa: “ Si afirmamos el antecedente de una formula condicional, se concluye en la afirmación del consecuente de dicha fórmula condicional”. La fórmula de este razonamiento es como sigue:

$$\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ A \\ \hline \therefore\ B \end{array}$$

Sin embargo, las leyes lógicas se pueden usar como reglas lógicas, como ocurrirá en lo sucesivo con las leyes equivalentes.

2.11.1. Equivalencias Notables

También conocidas como leyes equivalentes porque resultan ser las más conocidas y útiles en la transformación y simplificación de fórmulas. A continuación las leyes equivalentes:

1. Leyes asociativas (Asoc.)

1.1. $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

1.2. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

1.3. $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$

La Asoc. Nos indica que dos o más conjunciones con la misma jerarquía se pueden agrupar indistintamente. Esta afirmación va le también para las disyunciones y las bicondicionales.

2. Leyes conmutativas (Conm.)

2.1. $p \vee q \equiv q \vee p$

2.2 $p \wedge q \equiv q \wedge p$

2.3. $(p \leftrightarrow q) \equiv (q \leftrightarrow p)$

Según estas leyes, los componentes de las formulas conjuntivas, disyuntivas y bicondicionales se puede permutar.

3. Leyes de la idempotencia (Idem.)

3.1. $p \vee p \equiv p$

3.2. $p \wedge p \equiv p$

Según Idem, las fórmulas que se repiten en una cadena de conjunciones o en una cadena de disyunciones se eliminan.

4. Leyes distributivas (Dist.)

4.1. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

4.2. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

4.3. $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

4.4. $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

La Dist. 4.2 es la distribución del conjuntivo al disyuntivo, donde uno de los componentes de la conjunción se distribuye a cada uno de los componentes de la disyunción; en cambio la operación inversa se denomina del factor común. El procedimiento es el mismo para 4.1, denominado distribución del disyuntivo al conjuntivo.

5. Ley de la doble negación (DN)

5.1. $\sim(\sim p) \equiv p$

Según DN, dos negaciones con el mismo alcance equivalen a una afirmación.

6. Leyes De Morgan (DM)

6.1. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

6.2. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

Según 6.1. la negación de una conjunción se interna en cada uno de sus componentes, a la vez el operador "$\wedge$" se cambia por "$\vee$". El procedimiento es igual en 6.2. con la diferencia que el operador "$\vee$" se cambia por "$\wedge$"

7. Leyes de la absorción (Abs.)

7.1. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

7.2. $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

7.3. $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

7.4. $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

7.5. $\sim p \wedge (p \vee q) \equiv \sim p \wedge q$

7.6. $\sim p \vee (p \wedge q) \equiv \sim p \vee q$

7.7. $\sim p \vee (p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee \sim q$

7.8. $\sim p \wedge (p \vee \sim q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

La 7.1 y 7.4 son absorciones de una fórmula conjuntiva a una fórmula disyuntiva. En este caso llamaremos fórmula absorbente a una variable negada o sin negar o a una conjunción básica. A la fórmula disyuntiva donde se efectúa la absorción la llamaremos la absorbida. Las leyes 7.2 y 7.3 son las absorciones de una fórmula disyuntiva a una fórmula conjuntiva. En este caso la fórmula absorbente es una variable negada o sin negar o una disyunción básica, y la fórmula absorbida es una fórmula conjuntiva. Ahora podemos enunciar dos reglas para operar todos los casos por Abs.

R_1: Si de la fórmula absorbente se repite una variable negada o sin negar idénticamente en la formula absorbida, entonces toda la fórmula absorbida se elimina.

R_2: Si de la fórmula absorbente la variable que se repite en la absorbida esta negada, entonces se elimina sólo la variable que está en la absorbida.

8. Leyes de la implicación (Imp.)

8.1. $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

8.2. $p \Rightarrow q \equiv \sim (p \wedge \sim q)$

Según 8.1 una fórmula condicional se transforma en una formula disyuntiva con solo negar el antecedente de dicha fórmula. También se puede decir: “p implica a q”, si y sólo si o “p” es falso o “q” es verdadero. De igual modo

8.2 “p implica a q” si y sólo si no es el caso que “p” sea verdadero y “q” falso.

9. Leyes de la equivalencia (Eq.)

9.1. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

9.2. $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

Según 9.1 una formula bicondicional se puede transformar en una conjunción de condicionales, esto es, “p equivale a q”, si y solo si “p implica q” y “q implica a p”. También una formula bicondicional puede transformarse en una disyunción de conjunciones como indica 9.2, esto es, “p equivale a q”, si y solo si o “p” y “q” son verdaderos a la vez o “p” y “q” son falsos a la vez.

10. Leyes de la expansión (Expan.)

10.1. $p \equiv p \wedge (q \vee \sim q)$

10.2. $p \equiv p \vee (q \wedge \sim q)$

10.3. $p \rightarrow q \equiv p \leftrightarrow (p \wedge q)$

10.4. $p \rightarrow q \equiv q \leftrightarrow (p \vee q)$

11. Leyes de la transposición (Trans.)

11.1. $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$

11.2. $(p \leftrightarrow q) \equiv (\sim q \leftrightarrow \sim p)$

12. Ley de la exportación (Exp.)

12.1. $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$

13. Leyes de la negación de la equivalencia (NEq.)

13.1 $\sim (p \leftrightarrow q) \equiv (\sim p \leftrightarrow q)$

13.2. $\sim (p \leftrightarrow q) \equiv (p \leftrightarrow \sim q)$

14. Leyes de dominación

14.1. $p \vee V \equiv V$

14.2. $p \wedge F \equiv F$

15. Leyes de identidad

15.1. $p \vee F \equiv p$

15.2. $p \wedge V \equiv p$

16. Ley de exclusión del término medio

16.1. $p \vee \sim p \equiv V$

17. Ley de contradicción

17.1 $p \wedge \sim p \equiv F$

18. Ley de la disyunción fuerte

18.1 $p \Delta q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

2.11.1. Ejemplos de aplicación de las principales equivalencias notables:

1 Utilizando la ley distributiva:

a. $p \wedge (\sim q \vee r \vee \sim s)$

b. $(p \wedge \sim q) \vee (p \wedge r) \vee (p \wedge \sim s)$…de a por 4.2

En este caso "p" se ha distribuido en cada uno de los componentes de las disyunciones. La fórmula "b" es equivalente a "a".

2. a. $(\sim p \wedge q) \vee (r \vee s)$

b. $(\sim p \vee r \vee s) \wedge (q \vee r \vee s)$…de "a" por 4.1

En este caso "$r \vee s$" se ha distribuido en cada uno de los componentes de la conjunción.

En 4.3 y 4.4, la distribución del condicional se efectúa partiendo del antecedente hacia el consecuente, ya sea para la conjunción o para la disyunción. En los dos casos, la operación inversa podemos denominarla también del factor común.

3. Utilizando la ley de absorción:

a. $(p \wedge q) \wedge (\sim r \vee q)$

b. $p \wedge q$ …. de "a" por R_1

En este caso la formula absorbente es "$p \wedge q$" porque el operador principal es "$\wedge$". Como se puede apreciar "q" se repite idénticamente en la absorbida "$\sim r \vee q$", de ahí que la absorbida se elimina.

4. a. $(p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim q \vee s) \vee (\sim t \wedge s)$

b. $(\sim q \vee s) \vee (\sim t \wedge s)$…de a por R_1.

c. $(\sim q \vee s)$… de b por R_1.

En el ejercicio 4 la formula absorbente es "$\sim q \vee s$" porque el operador principal es "$\vee$". Como se puede observar, "$\sim q$" se repite idénticamente en la formula conjuntiva "$p \wedge \sim q \wedge r$", por ello, en 2 se elimina. Luego, de la formula absorbente, "s" se repite en "$\sim t \wedge s$", por ello, también se elimina, obteniéndose la fórmula 3 que es un equivalente de la fórmula 1.

5. a. $(p \vee \sim q) \vee (\sim p \wedge r)$

b. $p \vee \sim q \vee r$… de a por R_2.

En este caso la formula absorbente es "$p \vee q$", pero la variable "p" que se repite en la absorbida esta negada, de ahí que se elimina solamente la variable que está en la absorbida.

6. a. $(p \vee q) \wedge (r \vee \sim s) \wedge (\sim r \wedge \sim q)$

b. $p \wedge (r \vee \sim s) \wedge (\sim r \wedge \sim q)$… de a por R_2.

c. $p \wedge \sim s \wedge \sim r \wedge \sim q$… de b por R_2.

En el ejercicio 6 la formula absorbente es "$\sim r \wedge \sim q$". Como "$\sim q$" aparece negada en la absorbida "$p \vee q$", se elimina solo "q". De igual modo, solo se elimina "r" de la formula absorbida "$r \vee \sim s$". Luego, la formula se aparece en "c" es equivalente a "a".

7. Utilizando la ley de implicación:

a. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

b. $\sim p \vee (q \rightarrow r)$… de a por Imp.

c. $\sim p \vee \sim q \vee r$… de b por Imp.

8. Utilizando la ley de la bicondicional:

a. $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

b. $[p \rightarrow (q \leftrightarrow r)] \wedge [(q \leftrightarrow r) \rightarrow p]$… de a por Eq.

c. $\{p \rightarrow [(q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)]\} \wedge \{[(q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)] \rightarrow p\}$

2.11.2. Ejercicios desarrollados.

I. Simplificar las siguientes proposiciones utilizando las equivalencias notables:

1. $\boldsymbol{\sim \{[\sim(\sim p \wedge q) \vee \sim q] \rightarrow [\sim(p \vee \sim q)]\}}$

Solución:

$\sim \{\sim[\sim(\sim p \wedge q) \vee \sim q] \vee [\sim(p \vee \sim q)]\}$

$[\sim(\sim p \wedge q) \vee \sim q] \wedge \sim [\sim(p \vee \sim q)]\}$

$[(p \vee \sim q) \vee \sim q] \wedge (p \vee \sim q)$

$(p \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim q)$

$(p \vee \sim q)$

2. $\boldsymbol{[(p \vee q) \rightarrow \sim(r \rightarrow p)] \vee \sim(q \rightarrow p)}$

Solución:

$\sim [\sim(p \vee q) \vee \sim(\sim r \vee p)] \vee \sim(\sim q \vee p)$

$[(p \vee q) \wedge (\sim r \vee p)] \vee (q \wedge \sim p)$

$[p \vee (q \wedge \sim r)] \vee (q \wedge \sim p)$

$(q \wedge \sim r) \vee [p \vee (q \wedge \sim p)]$

$(q \wedge \sim r) \vee (p \vee q)$

$(q \wedge \sim r) \vee q \vee p$

$q \vee p$

3. $\boldsymbol{\{[(p \rightarrow q) \wedge p] \vee \sim(q \rightarrow p)\} \rightarrow \sim(p \vee \sim q)}$

Solución:

$\sim \{[(p \rightarrow q) \wedge p] \vee \sim(q \rightarrow p)\} \vee (\sim p \wedge q)$

$\sim \{[(\sim p \vee q) \wedge p] \vee \sim(\sim q \vee p)\} \vee (\sim p \wedge q)$

$\sim [(\sim p \vee q) \wedge p] \wedge (\sim q \vee p) \vee (\sim p \wedge q)$

$\sim(\sim p \vee q) \vee \sim p \wedge (\sim q \vee p) \vee (\sim p \wedge q)$

$[(p \wedge \sim q) \vee \sim p] \wedge (\sim q \vee p) \vee (\sim p \wedge q)$

$[(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim q \vee p)] \vee (\sim p \wedge q)$

$[\sim q \vee (\sim p \wedge p)] \vee (\sim p \wedge q)$

$[\sim q \vee F] \vee (\sim p \wedge q)$

$\sim q \vee (\sim p \wedge q)$

$\sim q \vee \sim p$

4. $\boldsymbol{\sim[\sim(p \wedge q) \rightarrow \sim q] \vee p}$

Solución:

$\sim[(p \wedge q) \vee \sim q] \vee p$

$[\sim(p \wedge q) \wedge q] \vee p$

$[(\sim p \vee \sim q) \wedge q] \vee p$

$(q \wedge \sim p) \vee p$

$p \vee q$

5. Usando las equivalencias notables, demostrar que la siguiente proposición es una tautología:

$\boldsymbol{[p \wedge (p \,\Delta\, q)] \rightarrow [(p \leftrightarrow q) \rightarrow q]}$

Solución:

$[p \wedge \sim(p \leftrightarrow q)] \rightarrow \{[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)] \rightarrow q\}$

$\{p \wedge \sim[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]\} \rightarrow \{\sim[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \vee q\}$

$\{p \wedge \sim[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)]\} \rightarrow \{[(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)] \vee q\}$

$\{p \wedge [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]\} \rightarrow [(p \wedge \sim q) \vee q]$

$\{[p \wedge (p \wedge \sim q)] \vee [p \wedge (q \wedge \sim p)]\} \rightarrow [(p \vee q) \wedge (\sim q \vee q)]$

$[(p \wedge p \wedge \sim q) \vee (p \wedge \sim p \wedge q)] \rightarrow (p \vee q) \wedge V$

$[(p \wedge \sim q) \vee F] \rightarrow (p \vee q)$

$\sim (p \wedge \sim q) \vee (p \vee q)$

$(\sim p \vee q) \vee (p \vee q)$

$\sim p \vee p \vee q \vee q$

$V \vee q$

V

6. $\{[(p \vee q) \Delta (p \rightarrow q)] \leftrightarrow (r \vee \sim q)\} \wedge \sim (r \rightarrow \sim q)$

Solución:

$\{[(p \vee q) \Delta (\sim p \vee q)] \leftrightarrow (r \vee \sim q)\} \wedge (\sim r \vee \sim q)$

$\{\sim [(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)] \leftrightarrow (r \vee \sim q)\} \wedge (\sim r \vee \sim q)$

$\{\sim [((p \vee q) \rightarrow (\sim p \vee q)) \wedge ((\sim p \vee q) \rightarrow (p \vee q))] \leftrightarrow (r \vee \sim q)\} \wedge (\sim r \vee \sim q)$

$\{\sim [(\sim (p \vee q) \vee (\sim p \vee q)) \wedge (\sim (\sim p \vee q) \vee (p \vee q))] \leftrightarrow (r \vee \sim q)\} \wedge (\sim r \vee \sim q)$

$\{\sim [((\sim p \wedge \sim q) \vee \sim p \vee q) \wedge ((p \wedge \sim q) \vee p \vee q)] \leftrightarrow (r \vee \sim q)\} \wedge (\sim r \vee \sim q)$

$\{\sim [(\sim p \vee q) \wedge (p \vee q)] \leftrightarrow (r \vee \sim q)\} \wedge (\sim r \vee \sim q)$

$\{\sim (F \vee q) \leftrightarrow (r \vee \sim q)\} \wedge (\sim r \vee \sim q)$

$[\sim q \leftrightarrow (r \vee \sim q)] \wedge (\sim r \vee \sim q)$

$[\sim q \rightarrow (r \vee \sim q)] \wedge [(r \vee \sim q)] \rightarrow \sim q] \wedge (\sim r \vee \sim q)$

$[q \vee (r \vee \sim q)] \wedge [\sim (r \vee \sim q)] \vee \sim q] \wedge (\sim r \vee \sim q)$

$(r \vee \sim q \vee q) \wedge [(\sim r \wedge q) \vee \sim q] \wedge (\sim r \vee \sim q)$

2.12. LÓGICA CUANTIFICACIONAL

A todo enunciado de la forma P(x) se denomina función proposicional la cual tiene la propiedad de convertirse en una proposición al ser sustituido la variable x por una constante "a".

Nota: Al conjunto de todos los valores convenidos para la variable x se denomina dominio de la variable.

Ejemplo:

$P(x) = x + 2 \quad / \; P(x) < 2 , x \in Z$

Si $x = -2$ P(x) es verdadero

Si $x = 1$ P(x) es falso

Por lo tanto P(x) es una función proposicional.

2.12.1 Cuantificadores Existenciales y Universales

Se ha visto un método que nos permite que a partir de una función proposicional P(x) se pueda obtener proposiciones, sin embargo se tiene otro método completamente distinto que permite obtener proposiciones a partir de una función proposicional, dicho método es llamado cuantificadores.

Si a cada enunciado abierto le anteponemos la expresión "para todo" o la expresión "existe" estaremos obteniendo nuevas proposiciones cuantificadas Universalmente o Existencialmente respectivamente.

2.12.2. Cuantificador Universal (∀)

Si a una proposición abierta P(x) donde los valores de la variable x están definidos sobre una conjunción A, le anteponemos la expresión "para todo x" obtenemos:

"para todo x ∈ A , P(x)". La frase "para todo" x se denomina el cuantificador Universal y se simboliza por: **∀x** que se lee para todo x.

A un cuantificador Universal puede ser reemplazado por:

∀x : P(x) o ∀x / P(x) o (∀x) (P(x))

Y en todas estas notaciones, se lee "para todo x, tal que se verifica P(x)" es decir: ∀ se lee "para todo"

$$\begin{array}{llccc} & & \text{El cuantificador} & & \text{El cuantificado} \\ \text{Notación:} & \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{c} \forall x \\ \forall x \\ (\forall x) \end{array} & \begin{array}{c} : \\ / \\ \ \end{array} & \begin{array}{c} P(x) \\ P(x) \\ (P(x)) \end{array} \end{array}$$

Ejemplo: Determinar el valor de verdad del siguiente enunciado, como universo los números reales:

$$\underbrace{\forall\ x \in R}_{\text{Cuantificador}}\ /\ \underbrace{x + 3 < 6}_{\text{Cuantificado}}$$

Solución: **Entonces P(x) es falso.**

El enunciado es falso porque como el universo son todos los números reales entonces tendría que cumplir todos los reales la condición de "$x + 3 < 6$". Porque se dice todos, porque el cuantificador que se identifica es un Universal ($\forall$) por lo tanto se lee "para todo" esto quiero decir que todos los elementos del universo que en este ejemplo viene ser los reales tendría que cumplir con la condición que se plantea en el ejemplo, como no cumple con todos entonces llegamos a la conclusión que $P(x)$ es falso.

2.12.3. Cuantificador Existencial (∃)

Si al enunciado abierto $P(x)$, donde $x \in A$ se le antepone la frase "existe x" obtenemos: "existe $x \in A$, $P(x)$". El cuantificador Existencial puede ser representado por: $\exists x : P(x)$ o $\exists x \,/\, P(x)$ o $(\exists x)\ (P(x))$

Y en todas estas notaciones se lee: "Existe por lo menos un x, tal que se verifique P(x)" es decir: ∃ se lee existe.

$$
\begin{array}{lccc}
 & \text{El cuantificador} & & \text{El cuantificado} \\
\text{Notación:} & \left\{ \begin{array}{c} \exists x \\ \exists x \\ (\exists x) \end{array} \right. & \begin{array}{c} : \\ / \\ \ \end{array} & \begin{array}{c} P(x) \\ P(x) \\ (P(x)) \end{array}
\end{array}
$$

Ejemplo: Sea el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ hallar el valor de verdad de la siguiente proposición:

$\exists\, x \in A \,/\, 2x + 1 = 5$

Solución: Entonces **P(x) es verdadero**

Aquí si la proposición es verdadera, porque el cuantificador es una Existencial que se lee: "existe por lo menos un x". Esto da entender que basta que solo un elemento del universo que en este ejemplo viene ser el conjunto A cumpla con la condición planteada "2x + 1 = 5" entonces podemos afirmar que P(x) es verdadera.

2.12.4. Negación de Proposición con Cuantificadores

Proposición	La negación
$\forall\, x : P(x)$	$\sim [\, \forall\, x : P(x) \,] \equiv \exists\, x : \sim P(x)$
$\exists\, x : P(x)$	$\sim [\, \exists\, x : P(x) \,] \equiv \forall\, x : \sim P(x)$
$\forall\, x \in A : P(x)$	$\sim [\, \forall\, x \in A : P(x) \,] \equiv \exists\, x \in A : \sim P(x)$
$\exists\, x \in A : P(x)$	$\sim [\, \exists\, x \in A : P(x) \,] \equiv \forall\, x \in A : \sim P(x)$

Ejemplo: Negar la proposición, $\forall\, x \in N \,/\, 2x + 5 < 10$

Solución: $\sim [\, \forall\, x \in N \,/\, 2x + 5 < 10 \,]$

$$\exists\, x \in N \,/\, 2x + 5 \leq 10$$

Ejemplos: Negar cada una de las siguientes proposiciones, teniendo como referencia el conjunto de los reales R.

a) $(\forall x)\ (\exists x) : [\ P(x) \rightarrow (\ Q(y) \rightarrow R(x))\ ]$

Solución:

$\sim [\ (\forall x)\ (\exists x)] : \sim [\ P(x) \rightarrow (\ Q(y) \rightarrow R(x))\ ]$

$(\exists x)\ (\forall x) : \ \sim [\ \sim P(x) \vee (\sim Q(y) \vee R(x))\ ]$

$(\exists x)\ (\forall x) : \ [\ P(x) \wedge \ \sim (\sim Q(y) \vee R(x))\ ]$

$(\exists x)\ (\forall x) : \ [\ P(x) \wedge \ (\ Q(y) \wedge \ \sim R(x))\ ]$

b) $(\forall x)\ (\exists y)\ (\forall z) : \ [\ P(x,y) \rightarrow (\ Q(x) \vee R(z))\ ]$

Solución:

$\sim [\ (\forall x)\ (\exists y)\ (\forall z)\ ] : \sim [\ P(x,y) \rightarrow (\ Q(x) \vee R(z))\ ]$

$(\exists x)\ (\forall y)\ (\exists z) : \sim [\ \sim P(x,y) \vee (\ Q(x) \vee R(z))\ ]$

$(\exists x)\ (\forall y)\ (\exists z) : [\ P(x,y) \wedge \sim (\ Q(x) \vee R(z))\ ]$

$(\exists x)\ (\forall y)\ (\exists z) : [\ P(x,y) \wedge \ (\sim Q(x) \wedge \sim R(z))\ ]$

c) $\forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z} \ : [\ (x < y) \rightarrow (x^2 < y + 1)\ ]$

Solución:

$\sim [\ \forall x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{Z}\ ] : \sim [\ (x < y) \rightarrow (x^2 < y + 1)\ ]$

$\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{Z} \ : \sim [\ \sim (x < y) \vee (x^2 < y + 1)\ ]$

$\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{Z} \ : \ [\ (x < y) \ \wedge \ \sim (x^2 < y + 1)\ ]$

$\exists x \in \mathbf{R}, \forall y \in \mathbf{Z} \ : [\ (x < y) \ \wedge \ (x^2 \geq y + 1)\ ]$

2.12.5. Ejercicios desarrollados:

a) Evaluar $\sim \{\sim (p \vee \sim q)\} \leftrightarrow \{ \sim [(r \wedge p) \rightarrow (p \wedge \sim p)]\}$

$p : \{ \forall\, x \in R \ / x^0 = 1\}$; $q : \{ \exists\, x \in Q \ / 3x^2 = x - 5\}$

$r : \{ \exists\, x \in Z \ / x^2 - 2x - 1 = -1\}$

Solución:

$p \equiv V$

$q \equiv F$

$r \equiv V$

En p es "V" porque cualquier número elevado a la cero es 1, en q es "F" porque no existe un numero racional que resulte esa igualdad y r es "V" porque si existe un numero entero que al reemplazar en la variable x da como resultado -1 (x = 2).

Evaluamos:

$\sim \{\sim (p \vee \sim q)\} \leftrightarrow \{ \sim [(r \wedge p) \rightarrow (p \wedge \sim p)]\}$

$\sim \{\sim (V \vee V)\} \leftrightarrow \{ \sim [(V \wedge V) \rightarrow (V \wedge F)]\}$

$\sim \{ F \} \leftrightarrow \{ F \rightarrow F \}$

$V \leftrightarrow V$

V

b) Si U = { 1, 2, 3, … 99}, determinar cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas.

- { $\exists\, x \in U / x + 5 = 2x$ }

- **{ $\forall$ x $\in$ U / x + 1 $\in$ U }**

Solución:

- **{ $\exists$ x $\in$ U / x + 5 = 2x }** $\equiv$ V (verdadero)
- **{ $\forall$ x $\in$ U / x + 1 $\in$ U }** $\equiv$ F (falso)

En la primera viñeta es "V" porque el cuantificador que tenemos es una Existencial ($\exists$) y basta que exista al menos un elemento que cumpla la condición mencionada, y el número que cumple es 5.

En la segunda viñeta es "F" porque tenemos el cuantificador universal esto quiere decir todos los elementos del conjunto U cumpla con la condición de la segunda viñeta, y como no cumple con el elemento 99 de dicho conjunto entonces esta proposición es falsa.

c) Tenemos x, y pueden ser cualquiera de los números 1 y 2, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- **($\exists$ x) ($\forall$ y) / (x $\leq$ y + 2)**
- **($\exists$ x) ($\exists$ y) / (x + y = 2)**
- **($\forall$ x) ($\exists$ y) / (x + y < 5)**

Solución: ($\exists$ x) ($\forall$ y) / (x $\leq$ y + 2)

x = 1

y = 1, 2

Reemplazamos:

$1 \leq 3$ con x = 1, y = 1… es V

$1 \leq 4$ con x = 1, y = 2… es V

$\therefore$ **$(\exists x)\ (\forall y) / (x \leq y + 2)$** $\equiv$ V (verdadero)

En la primera viñeta tenemos que el cuantificador Existencial afecta a la variable “x”, esto quiere decir que basta solo un elemento cualquiera del conjunto (1,2) pueda satisfacer la condición planteada. Como tenemos que x siempre tiene que ser menor o igual ($\leq$) para que cumpla la condición de la primera viñeta, y “x” está afectada por la existencial solo tomamos uno, entonces se toma el menor (1). Pero a la variable “y” le afecta el cuantificador ($\forall$) esto quiere decir que tiene que cumplir todos los elementos del conjunto (1, 2) para que cumpla la condición. Entonces al reemplazar obtenemos que la primera proposición sea verdadera. En los demás ejemplos obviaremos la explicación ya que son los mismos pasos.

Solución: $(\exists x)\ (\exists y) / (x + y = 2)$

x = 1

y = 1

Reemplazamos:

2 = 2 con x = 1, y = 1… es V

$\therefore$ **$(\exists x)\ (\exists y) / (x + y = 2)$** $\equiv$ V (verdadero)

Solución: $(\forall x)\ (\exists y) / (x + y < 5)$

$x = 1, 2$

$y = 1$

Reemplazamos:

$2 < 5$ con $x = 1, y = 1$… es V

$3 < 5$ con $x = 2, y = 1$… es V

$\therefore$ **$(\forall x)\ (\exists y) / (x + y < 5)$** $\equiv$ V (verdadero)

d) Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 5, 8\}$, ¿Cuáles de las afirmaciones son verdaderas?

- $\sim [\forall x \in A, \exists y \in B / x > y]$
- $\forall x \in B, \exists y \in A\ / x - y \in A$

Solución:

- **$\sim [\forall x \in A, \exists y \in B / x > y]$**

  $\exists x \in A, \forall y \in B / x \leq y$

  $x = 1$

  $y = 1, 4, 5, 8$

  Reemplazamos

  $1 \leq 1$; $x = 1, y = 1$…V

  $1 \leq 4$; $x = 1, y = 4$…V

  $1 \leq 5$; $x = 1, y = 5$…V

  $1 \leq 8$; $x = 1, y = 8$…V

$\therefore \sim [\forall x \in A, \exists y \in B / x > y] \equiv$ V (verdadero)

En este ejemplo primero tenemos que desarrollar la negación que afecta al cuantificador y al cuantificado ahí obtenemos una nueva proposición. De igual forma identificamos primero que cuantificadores afectan a las variables según eso analizamos y reemplazamos en la condición para verificar su valor de verdad. En "x" solo escogemos un elemento porque es existencial y solo basta uno para que cumpla la condición, en cambio en "y" es universal y tiene que cumplir con todos los elementos del conjunto para que cumpla la condición. Así obtenemos una proposición verdadera.

Solución:

- $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{B},\ \exists\, \mathbf{y} \in \mathbf{A}\ /\ \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbf{A}$

  $x = 1, 4, 5, 8$

  $y = 1, 2, 3, 4$

  $8 - 2 = 6 \notin A$; $x = 8, y = 2$… F

  $\therefore\ \forall\, x \in B,\ \exists\, y \in A\ /\ x - y \in A \equiv$ F (falso)

Aquí probamos cualquier elemento de los dos conjuntos, no cumple la condiciona así que por lo tanto la proposición es falsa.

e) Sea $M = \{0, 1, 2, 3\}$ el dominio de x e y, señalar el valor de verdad de:

$\forall$ x, $\exists$ y / ($x^2 - y^2 < 10$) $\vee$ ($x^2 < y + 1$)

Solución:

x = 0, 1, 2, 3

y = 3

Reemplazando: ($x^2 - y^2 < 10$)

$-9 < 10$; x = 0, y = 3… V

$-8 < 10$; x = 1, y = 3… V

$-5 < 10$; x = 2, y = 3… V

$0 < 10$; x = 3, y = 3… V

$\therefore$ ($x^2 - y^2 < 10$) $\equiv$ V (verdadero)

Reemplazando: ($x^2 < y + 1$)

x = 0, 1, 2, 3   y = 3

$0 < 4$; x = 0, y = 3… V

$1 < 4$; x = 1, y = 3… V

$4 < 4$; x = 2, y = 3… F

$9 < 4$; x = 3, y = 3… F

$\therefore$ ($x^2 < y + 1$) $\equiv$ F (falso)

($x^2 - y^2 < 10$) $\vee$ ($x^2 < y + 1$)

V $\vee$ F $\equiv$ V

f) Si U = { x ∈ R / 2 < x < 10 }

p : ($\forall$ x ∈ U) ($\exists$ y ∈ U) ($\forall$ z ∈ U) / $-x - y > z^2$

q : ($\forall$ x ∈ U) ($\exists$ y ∈ U) ($\exists$ z ∈ U) / $x + y < z^2$

Hallar el valor de verdad de $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge q)$

Solución:

Hallamos p

$U = \{ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$y = 3$

$x = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

$z = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

$\therefore$ p: $(\forall\ x \in U)\ (\exists\ y \in U)\ (\forall\ z \in U)\ /\ -x - y > z^2 \equiv F$

Dos números negativos no son mayores que un número elevado al cuadrado es por eso que es falso.

Hallamos q

$y = 3$

$x = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

$z = 9$

Reemplazando: $x + y < z^2$

$6 < 81$; $x = 3, y = 3, z = 9$… V

$7 < 81$; $x = 4, y = 3, z = 9$… V

. . .

. . .

$12 < 81$; $x = 9, y = 3, z = 9$… V

$\therefore$ q: $(\forall\ x \in U)\ (\exists\ y \in U)\ (\exists\ z \in U)\ /\ x + y < z^2 \equiv V$

Hallamos: $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow (p \wedge q)$

$$(V \vee F) \rightarrow (F \wedge V)$$

$$V \rightarrow F$$

$$F$$

Para hallar el valor de verdad de "p" es directo porque dos números negativos no son mayores que un número elevado al cuadrado. Para el valor de verdad de "q" si analizamos para la variable "y" y "z" como los dos están afectados por el cuantificador Existencial (∃), esto quiere decir que solo basta que uno de los elementos cumpla la condición para decir que la proposición "q" sea verdadera. Para "y" tomamos solo el 3 porque y tiene que ser el menor de todos los elementos de U para que pueda cumplir la condición. Para "z" si tomamos el mayor elemento como es el 9. Para "x" si toman todos los elementos por ser un cuantificador Universal.

g) Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-2, -1, 0, 5, 6\}$, establecer el valor de verdad de :

- $(\forall x \in A)(\exists y \in B) : x + y < 3$
- $(\forall x \in B)(\forall y \in A) : x < y \rightarrow x^2 < y^2$

Solución: $(\forall x \in A)(\exists y \in B) : x + y < 3$

$x = 1, 2, 3, 4, 5$

$y = -2$

Reemplazamos: $x + y < 3$

$-1 < 3$; $x = 1, y = -2$… V

$0 < 3$; $x = 2, y = -2$… V

$1 < 3$; $x = 3, y = -2$… V

$2 < 3$; $x = 4, y = -2$… V

$3 < 3$; $x = 5, y = -2$… F

$\therefore$ $(\forall\, x \in A)\ (\exists\, y \in B)\ :\ x + y < 3 \equiv$ F (falso)

Aquí para "y" cono está afectada por una Existencial solo cogemos uno para que cumpla la condición y el más adecuado es el menor de todos los elementos (-2). Y para el "x" si es un cuantificador Universal se toma todos los elementos. Teniendo así una proposición falsa (F).

Solución: $(\forall\, x \in B)\ (\forall\, y \in A)\ :\ x < y \rightarrow x^2 < y^2$

$x = -2, -1, 0, 5, 6$

$y = 1, 2, 3, 4, 5$

Reemplazamos: $x < y \rightarrow x^2 < y^2$

$6 < 5$; $x = 5, y = 6$; $(x < y)$…F

$36 < 25$; $x = 5, y = 6$; $(x^2 < y^2)$…F

$x < y \rightarrow x^2 < y^2$

F $\rightarrow$ F

V

$\therefore$ $(\forall\, x \in B)\ (\forall\, y \in A)\ :\ x < y \rightarrow x^2 < y^2 \equiv$ V (verdadero)

Aquí como los dos cuantificadores son Universales solo probamos con uno de cada elemento si no cumple, esto quiere decir que la proposición es falsa.

h) Hallar el valor de verdad de la fórmula:

$[(p \vee q) \rightarrow (\sim r \vee \sim w)] \leftrightarrow (q \rightarrow r)$; Si:

p: $\exists\ x \in Q\ /\ x + 3 = \sqrt{2} + 3$, **q**: $\exists\ x \in I\ /\ x + 0 = \pi$

r: $\forall\ x \in N\ /\ x + 2.5 = 5$, **w:** $\exists\ x \in Q\ /\ x + 0 = \sqrt{2}$

Solución:

p: F ; **q:** V ; **r:** F ; **w:** F

$[(p \vee q) \rightarrow (\sim r \vee \sim w)] \leftrightarrow (q \rightarrow r)$

$[\quad V \quad \rightarrow \quad V \quad] \quad \leftrightarrow \quad F$

$V \quad \leftrightarrow \quad F$

F

i) Hallar el valor de verdad:

$[(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (r \vee q)] \wedge [\sim (p \wedge q) \leftrightarrow r]$

Si $U = \{ x \in Z\ /\ -100 \leq x \leq 100 \}$;

p: $(\forall\ x \in U)\ (\exists\ y \in U)\ (\forall\ z \in U)\ /\ x + y - z > 30$

q: $(\forall\ x \in U)\ (\forall\ y \in U)\ (\forall\ z \in U)\ /\ 2x + z - 4y < 800$

r: $(\exists\ x \in U)\ (\forall\ y \in U)\ (\exists\ z \in U)\ /\ 5x \leq z - y + 50$

Solución: Hallando "p"

$U = \{-100, -99, \ldots, 99, 100\}$

$y = 100$

$x = -100$

$z = 100$

Remplazando: $x + y - z > 30$

$-100 > 30$... F

$\therefore$ p: $(\forall\, x \in U)\ (\exists\, y \in U)\ (\forall\, z \in U)\ /\ x + y - z > 30 \equiv$ F (falso)

Para hallar la proposición "p" primero tenemos que analizar el cuantificador Existencial que afecta a la variable "y" analizando la condición de la proposición "p" la variable "y" tendría que ser el mayor elemento del conjunto U para que cumpla con tal condición y como es Existencial solo cogemos un elemento el mayor (100). Para la variable "x" si es un cuantificador universal esto quiere decir que tienen que cumplir todos sus elementos, pero al reemplazar todos los elementos del conjunto U serio muy tedioso y llevaría mucho tiempo, así que analizamos, para no reemplazar todos buscamos el elemento que sea el menor de todos del conjunto U, así, si con el menor cumple quiere decir que con todos los elementos de U van a cumplir y no habría de necesidad de reemplazar con todos, porque si cumple con el menor, todos los elementos del conjunto U cumplirán la condición, y no afectaría en nada porque todos los cuantificadores pertenecen al mismo conjunto U. Para "z" es el mismo paso que de la variable "y", la única diferencia que se coge un positivo mayor de U porque como "y" está acompañado de un signo negativo, y eso lo hace que sea menor y cumpla la condición.

Hallando "q"

$y = -100$

$x = 100$

$z = 100$

Reemplazando: $2x + z - 4y < 800$

$700 < 800$… V

$\therefore$ q: $(\forall\, x \in U)(\forall\, y \in U)(\forall\, z \in U) \,/\, 2x + z - 4y < 800 \equiv$ V

Para la proposición "q" se siguen los mismos pasos de la proposición "p" , analizando para no reemplazar todos los elementos de U, en los cuantificadores Universales.

Hallando "r"

$y = -100$

$x = 100$

$z = 100$

Reemplazando: $5x \leq z - y + 50 = 5x - z + y \leq 50$

$300 \leq 50$… F

$\therefore$ r: $(\exists\, x \in U)(\forall\, y \in U)(\exists\, z \in U) \,/\, 5x \leq z - y + 50 \equiv$ F (falso)

Evaluando el esquema molecular:

$[(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (r \vee q)] \wedge [\sim (p \wedge q) \leftrightarrow r\,]$

$[\quad (F) \quad \rightarrow \quad (V) \;] \wedge [\; \sim\; (F) \quad \leftrightarrow F\,]$

$[\quad V \quad] \wedge [\ V \quad \leftrightarrow F\ ]$

$[\quad V \quad] \wedge [\ F\ ]$

F

j) p: $(\exists\ x \in z) / (4x + 2)(3x - 7) = 0$

q: $(\forall\ x \in Z) / (x^2 > 0) \vee (x - 1) < 0$

r: $(\exists\ x \in N) / (4x + 2)(3x - 7) = 0$

Señale el valor de verdad de p, q, r y además hallar:

$[(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)] \rightarrow r$

Solución: p: F ; q: F ; r: F

Reemplazamos:

$[(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)] \rightarrow r$

$[(\ F\ ) \rightarrow (\ F)] \rightarrow F$

$[\ V\ ] \rightarrow F$

F

2.12.6. Ejercicios Propuestos:

I. Determinar el valor de verdad de los esquemas moleculares teniendo en cuenta las proposiciones con sus respectivos cuantificadores.

a) p: $\{\ \forall\ x \in Q / \frac{1}{2} + x > 0\ \}$, q: $\{\ \exists\ x \in I / x + 0 = \pi\ \}$

r: $\{ \forall x \in R / x^2 + 1 = 0 \}$. Hallar el valor de verdad de:

$[(p \rightarrow q) \wedge r] \leftrightarrow \sim q$

b) Sea U el conjunto universal y p, q, r las proposiciones:

$U = \{ -10, -9, \ldots, 80 \}, U \subset Z$

p: $\{ \forall x \in U, \exists y \in U / x - x^2 < -2y\}$

q: $\{ \exists y \in U, \forall x \in U / x - 5y < 3x - y\}$

r: $\{ \forall z \in U, \exists y \in U, \exists x \in U / x^2 + y^2 < z^2\}$

Evaluar: $(\sim p \vee r) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

c) Sea: $[(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (r \vee q)] \wedge [\sim (p \wedge q) \leftrightarrow r]$

Si $U = \{x \in Z / - 100 \leq x \leq 100\}$;

p: $(\forall x \in U) (\exists y \in U) (\forall z \in U) / x + y - z > 30$

q: $(\forall x \in U) (\forall y \in U) (\forall z \in U) / 2x + z - 4y < 800$

r: $(\exists x \in U) (\forall y \in U) (\exists z \in U) / 5x \leq z - y + 50$

II. Si x puede tomar cualquier valor 1, 2, 3, demostrar mediante contraejemplos la falsedad de las siguientes proposiciones.

a) $\{ (\forall x) / x^2 = x \}$

b) $\{ (\exists x) / x = 2x \}$

c) $\{ (\forall x) / x + 2 = 5 \}$

d) $\{ (\forall x) / x + 1 > 3\}$

e) $\sim \{ (\exists x) / x^2 = 4 \}$

f) $\{ (\exists x) / x > 4 \}$

III. Determinar los valores de verdad de las siguientes proposiciones. Si $U = \{1, 2, 3\}$ es el universo y si $x, y \in U$.

a) $\exists x, \exists y \;/\; x^2 < y + 1$

b) $\forall x, \exists y \;/\; x^2 + y^2 < 12$

c) $\forall x, \forall y \;/\; x^2 + y^2 < 12$

d) $\exists x, \exists y, \forall z \;/\; x^2 + y^2 < 2z^2$

e) $\exists x, \forall y, \exists z \;/\; x^2 + y^2 < 2z^2$, $z \in U$

f)

IV. Si $A = \{0,1, 2, 3, 4\}$ hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) p: $\exists x \in A \;/\; 2x + 1 = 5$

b) q: $\forall n \in Z^+ \;/\; 3n$ es divisible por 3

c) r: $\exists x \in R \;/\; x^2 + 7 < 0$

d) s: $\forall x \in Q \;/\; x^2 \geq x$

e)

V. Si $M= \{ -1, 1, 2, 7\}$ cual es el valor de verdad, de las siguientes proposiciones:

a) $\forall x \in M, \exists y \in M \;/\; x^2 \geq y$

b) $\exists x \in M, \forall y \in M \;/\; x \geq y^2 \geq 0$

c) $\exists x \in M, \exists y \in M \;/\; (x \leq 3) \vee (y^2 > 2)$

VI. Negar los siguientes cuantificadores y utilizar implicaciones notables (cuantificadores negativos).

a) $\forall$ x, $\exists$ y, $\forall$ z / [p(x,y) $\rightarrow$ (q(x) $\vee$ r(z))]

b) $\forall$ x, $\exists$ y, $\forall$ z / [~ (r(x) $\vee$ ~ p(x)) $\rightarrow$ q(z)]

c) $\forall x \in R, \exists y \in Z$ / $[(x < y) \rightarrow (x^2 < y + 1)]$

d) $\forall$ x, $\exists$ y / [(p(x,y) $\rightarrow$ q(y)) $\rightarrow$ r(x)]

e) $\forall$ x, $\exists$ y / {[p(x) $\rightarrow$ q(y)] $\rightarrow$ [(p(x) $\vee$ q(y)) $\wedge$ ~ r(y)]}

f) $\forall$ x, $\exists$ y, $\forall$ z / [(~ p(x) $\wedge$ q(y)) $\rightarrow$ ((p(x) $\wedge$ q(y)) $\vee$ t(z))]

g) $\forall$ x, $\exists$ y / [p(x) $\leftrightarrow$ (q(y) $\rightarrow$ r(x))]

BIBLIOGRAFIA

Barker, S. (1991). Elementos de lógica. México: McGraw-Hill Interamericana de México, S.A. de C.V.

Bernardo, R (2003). Introducción a la lógica (3a. Ed.). Lima: Mantaro.

Bunge, M. (1997). La ciencia su método y su filosofía. Buenos Aires: Sudamericana.

Colbert, J (1986). La evolución de la lógica simbólica y sus aplicaciones filosóficas. Pamplona: Ediciones Universidad de Navarra.

Copi, I. (1968). Introducción a la lógica. Buenos Aires: Eudeba.

Copi, I. y Cohen, C. (1999). Introducción a la lógica. México: Limusa.

Chávez, A. (1995). Introducción a la lógica. (2a. ed.). Lima: Editorial Mantaro.

Deaño, A. (1893). Introducción a la lógica formal. Madrid: Alianza Universidad.

Figueroa, R (2013). Matemática Básica. Lima: R.F.G

Garcia, J. (1936). Introducción a la lógica moderna. Barcelona: Labor.

Lázaro, C. (2009). Matemática Básica I. Perú: Moshera.

Lorenzen, P. (1970). Lógica formal. Madrid: Selecciones Científicas.

Mates, B. (1976). Lógica matemática elemental. Madrid: Gredos.

Miró, F. (1980). Lógica 1. Filosofía de las matemáticas. Lima: Ignacio prado pastor.

Mitchell, D. (1968). Introducción a la lógica. Barcelona: Labor.

Piaget, J Y Beth, E. W. (1980). Epistemología matemática y psicología. Barcelona: Grijalbo.

Piscoya, L. (1997). Lógica. (1a. ed.) Lima: Editorial UNMSM.

Rosales, D. (1994). Introducción a la lógica. Lima: Monterrico S. A.

Suppes, P. (1966). Introducción a la lógica simbólica. México: CECSA.

Suppes, P. y Hill, SH. (1992). Primer Curso de Lógica Matemática. México: Editorial Reverté, S.A.

Lluén, C. (2006). Cálculo Lógico. Lambayeque: Un enfoque didáctico.

Venero, B. A. (2009). Matemática Básica. Lima: Gemar.